

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

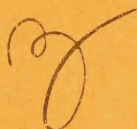
pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

J. M. PIASCO

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE ET LA MISE EN OEUVRE D'ALGORITHMES
D'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE NON LINEAIRE

Soutenue le 22 janvier 1976 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. AGUILAR MARTIN	} Examineurs
M. THOMAS	
M. de LARMINAT	
M. COCHET	

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

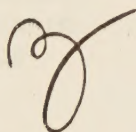
pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

J. M. PIASCO

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE ET LA MISE EN OEUVRE D'ALGORITHMES
D'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE NON LINEAIRE

Soutenue le 22 janvier 1976 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV	Président
M. AGUILAR MARTIN	} Examineurs
M. THOMAS	
M. de LARMINAT	
M. COCHET	

UNIVERSITE DE NANTES

Président : M. SPARFEL - Pharmacie -

Liste des enseignants des disciplines scientifiques :

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. IBISCH	"
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. MEZENECV (ENSM)	Automatique
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MOUTON	"
	Melle OFFRET (ENSM)	"
	M. GRAFF	Chimie
	M. MARTIN	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. ROUXEL	"
	M. WOJTKOWIAK	"
	M. GARRIGUES	Biologie
	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. FORESTIER	"
Professeurs associés	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. LEBORGNE	"
	M. GUEVEL (ENSM)	Hydrodynamique
	M. BARDON Roger	Physique
	M. CAILLER (IUT Nantes)	"
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NAOUR	"
	M. ROSIER	"
	M. CHABANEL	Chimie
	M. POINTEAU (ENSM)	"
	M. TOURNOUX	"
	M. LE LEC (IUT St-Nazaire)	Génie Chimique
	M. BOUCHY (IUT Nantes)	Métallurgie
	M. GOBIN (ENSM)	"

Professeurs sans chaire (suite)	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. DHOMBRES	Mathématiques
	M. DO (ENSEM)	"
	M. GAPAILLARD	"
	M. GATESOUBE	"
	M. LAMEAU (ENSM)	"
	M. PHAN-THE-LAI	"
	M. VOGEL	"
	M. DUBIGEON (ENSM)	Mécanique
	M. VAUSSY (ENSM)	"
	M. GROVEL (IUT St-Nazaire)	Génie Civil
	M. VILAINÉ (ENSM)	"
	M. SULMONT (ENSM)	Hydrodynamique
	M. de LARMINAT (IUT Nantes)	Automatique
	M. LE CORRE (ENSM)	"
	M. THOMAS (IUT Nantes)	"
	M. ERCEAU (IUT Nantes)	L.I.A.N.A.
	M. BECLE (IUT St-Nazaire)	Physique
	M. DEVELY (IUT St-Nazaire)	"
	M. LE BIHAN	"
	M. LEROY (IUT Nantes)	"
	M. LE MAITRE R.	"
	M. LONCKE	"
	M. LE MAITRE Félix (ENSM)	Technologie et Tech- niques de Production
	Mme MARTIN	Chimie
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LE BRUN	"
	Mme NICOLAS-PRATT	"
	M. NICOLAS	Sciences de la Terre

Secrétaire Général : M. LERAY

LETTER

My dear brother, I have just received your letter of the 10th inst. and am very glad to hear from you. I am well and hope this letter finds you the same. I have been thinking much of late about the future of our country and the state of our affairs. I feel that we are in a critical position and that it is our duty to do all that we can to preserve our liberty and our independence. I am sure that you share these feelings and that you will do all in your power to support the cause of our country.

I have been reading much of the history of our country and I am struck by the courage and the patriotism of our forefathers. I wish that I could see them and talk with them. I wish that I could see the great men of our country and hear their words of wisdom. I wish that I could see the people of our country and hear their voices. I wish that I could see the future of our country and know what it will be. I am sure that you share these feelings and that you will do all in your power to support the cause of our country.

I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country.

I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country.

I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country.

I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country. I am sure that you will do all in your power to support the cause of our country.

A MON FRERE

AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique. J'adresse tous mes remerciements à Monsieur le Professeur R. MEZENECV, Directeur du Laboratoire, pour les précieux conseils et les nombreux encouragements qu'il m'a toujours prodigués.

Que Monsieur Ph. De LARMINAT, Maître de Conférence à l'Institut Universitaire de Technologie de Nantes, qui fut l'initiateur de cette étude, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Je tiens à lui dire combien j'ai apprécié sa disponibilité constante, ses avis éclairés et ses remarques autorisées tout au long de notre collaboration.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur J. AGUILAR-MARTIN, qui dirige l'équipe de Recherche "Aspects stochastiques de l'Automatique" au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique, d'avoir bien voulu considérer mon travail avec intérêt et de faire partie de la Commission d'Examen. Les discussions fructueuses que nous avons eues lors de nos rencontres ont été pour moi d'une aide efficace.

Je remercie bien vivement Monsieur V. THOMAS, Maître de Conférence à l'Institut Universitaire de Technologie de Nantes, d'avoir accepté de participer à ce Jury.

Monsieur J.P. COCHET, Chef de Projets à la Compagnie d'Etudes et de Réalisations en Cibernetique Industrielle, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer lors de l'expérience de Chevîrê, me fait l'honneur de bien vouloir juger cette thèse, je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également tous mes Collègues chercheurs pour l'ambiance agréable qu'il ont su créer au sein du Laboratoire d'Automatique.

Enfin, j'adresse toutes mes félicitations à Mesdames LEMAIRE et POTIRON, qui ont eu le grand mérite de dactylographier ce mémoire à partir d'un manuscrit bien rébarbatif.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555012_0020

NOTATIONS ET SYMBOLES

δ_{ij}	: symbole de Kronecker
$\delta(t)$	: distribution de Dirac
a	: scalaire "a" (minuscules)
$\underline{v}$	: vecteur "v" (minuscules soulignées)
M	: matrice "M" (majuscules)
$\underline{0}$	: vecteur zéro
$\mathbf{0}$	: matrice nulle
$\mathbf{I}$	: matrice unité
$\text{Tr}(M)$	: trace de "M"
M^T	: matrice transposée de "M"
v^i	: composante N° i du vecteur " $\underline{v}$ "
M^{ij}	: élément de la matrice M (ligne i, Colonne j)
$\dim \underline{v}$	: dimension du vecteur $\underline{v}$
p	: variable de Laplace
Z	: opérateur "avance unité"
$E . $	: espérance mathématique
$E ./. $	: espérance mathématique conditionnelle
$N _{\underline{m}, V} $	: variable aléatoire gaussienne de moyenne $\underline{m}$ et de variance V
$ $	: références bibliographiques (en fin de chapitre)

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION</u> -	1
 <u>Chapitre I</u> : INTRODUCTION A L'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE ET AU FILTRAGE NON LINEAIRE	 5
1) Identification par filtrage non linéaire	6
2) Principes généraux du filtrage non linéaire	8
3) Les filtres non linéaires sous optimaux	10
3-1) Filtres définis par une approximation aussi parfaite que possible des densités de probabilité.	10
3-2) Filtres définis par une approximation des deux premiers moments.	10
3-3) Filtres déduits de l'hypothèse gaussienne	10
4) Conclusion	11
 <u>Chapitre II</u> : LE FILTRAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES REPRESENTES PAR UN MODELE DISCRET AVEC OBSERVATIONS DISCRETES	 15
1) Hypothèses de base et modèle mathématique adopté	16
2) Description du filtre non linéaire	17
3) Détermination de l'approximation linéaire	19
4) Cas d'un bruit non additif sur l'état	21
5) Cas des équations d'observations non linéaires	23
6) Conclusion	26
 <u>Chapitre III</u> : LE FILTRAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES REPRESENTES PAR UN MODELE CONTINU AVEC OBSERVATIONS DISCRETES	 31
1) Hypothèses de base et modèle mathématique adopté	32
2) Description du filtre non linéaire	33
2-1) Approximation du premier ordre	34
2-2) Approximations d'ordre supérieur	34
3) Calcul du terme correctif	37
4) Conclusion	38
 <u>Chapitre IV</u> : MISE EN OEUVRE DES EQUATIONS DE FILTRAGE	 41
1) Principe de décomposition en opérations élémentaires	42
2) Les transformations élémentaires de base	44
2-1) Transformation linéaire de base	45
2-2) Transformation non linéaire de base	46

2-3) Addition d'un terme aléatoire indépendant	47
2-4) Transformation non linéaire sur les bruits	48
2-5) L'estimation conditionnelle	48
3) Les modalités d'application	49
4) Initialisation, élimination des connaissances a priori	52
5) Estimation des variances	55
6) Conclusion	57

<u>Chapitre V</u>	: APPLICATIONS A L'IDENTIFICATION DE PRODEDES REELS	61
1)	Application du filtrage continu-discret	62
1-1)	Recherche du modèle discret équivalent	62
1-2)	Mise en oeuvre de l'identification	64
1-3)	Initialisation et élimination des connaissances a priori	67
1-4)	Application à l'identification de la chaîne de tangage d'un avion	69
2)	Identification d'une unité pilote générateur de vapeur	79
2-1)	Description de l'installation	79
2-2)	Mise en oeuvre de l'identification	81
2-3)	Estimation en ligne des paramètres	84
2-4)	Résultats de l'identification	84
3)	Identification d'un système multi-entrées, mono-sortie	90
3-1)	Modèle adopté	90
3-2)	Mise en oeuvre de l'identification	90
3-3)	Initialisation de l'algorithme	93
3-4)	Application à l'identification de la Centrale Thermique de Pont sur Sambre	94

<u>Chapitre VI</u>	: IDENTIFICATION DES CHAINES DE PRESSION ET DE TEMPERATURES DE LA TRANCHE 5 DE LA CENTRALE DE NANTES-CHEVIRE	105
1)	Description de l'installation	106
1-1)	La chaîne de pression vapeur	109
1-2)	La chaîne de température de surchauffe	109
1-3)	La chaîne de température de resurchauffe	111
2)	Le système informatique	111
2-1)	Acquisition des mesures et rangement sur disque	112
2-2)	Traitement des mesures sur site	112
2-3)	Le déchargement du disque	112
2-4)	Génération de signaux d'excitation	113

3) Modélisation de l'installation	113
3-1) Définition des entrées-sorties	113
3-2) Modèle déduit de la physique du système	114
4) Les signaux d'excitation et les enregistrements	119
4-1) Excitation par action sur les points de consignes ou sur certaines commandes	119
4-2) Excitation par injection de signaux binaires dans les chaînes de régulation	120
5) Identification des paramètres du modèle	123
5-1) Détermination des réponses indicielles	123
5-2) Détermination des paramètres du modèle	129
6) Commentaires sur les résultats	130
<u>CONCLUSION</u> -	147
<u>ANNEXE</u> -	149

INTRODUCTION

Les méthodes modernes de commande optimale demandent une connaissance précise des systèmes à commander et font appel le plus souvent à un modèle mathématique qui permet de représenter l'évolution des grandeurs de sortie à partir de l'évolution des grandeurs d'entrée. La première étape dans la détermination d'un modèle est sa "caractérisation", c'est-à-dire du choix de la forme générale des équations.

Dans le cas d'un modèle de "connaissance", les équations sont déduites directement des lois physiques de base régissant le système, mais dans le cas d'un modèle de "représentation", la caractérisation est toujours plus ou moins arbitraire et est souvent fonction des objectifs que se fixe l'automaticien, c'est-à-dire du choix du système de commande à mettre en oeuvre. La deuxième étape, "l'identification", est l'évaluation quantitative des paramètres intervenant dans les équations, qu'ils aient une signification physique ou non. Cette évaluation n'est généralement possible qu'à partir d'un ensemble de mesures effectuées sur les entrées-sorties.

Chacun sait, néanmoins, qu'un modèle ne peut être qu'approché, même s'il est obtenu à partir de théories physiques fondamentales (qui ne peuvent représenter qu'imparfaitement la réalité), d'autre part, les mesures sont généralement entachées d'erreurs (si faibles soient-elles). Aussi, nous sommes conduits à adopter des équations où interviennent des perturbations inconnues.

En se plaçant dans un contexte probabiliste quant-à ces perturbations, on se trouve alors confronté à un problème d'estimation statistique des paramètres. Cependant, si la loi statistique des bruits de mesures peut être connue, les erreurs dues aux approximations et aux simplifications lors de la caractérisation du modèle ne peuvent être représentées que par des lois statistiques choisies arbitrairement. Toutefois, une théorie de l'estimation des paramètres ne peut être construite qu'à partir d'hypothèses précises sur les caractéristiques statistiques des perturbations. Généralement, on suppose que les signaux bruits sont centrés, gaussiens, stationnaires ou non, de variances connues.

Dans le cas où la représentation choisie est (on peut se ramener) à une représentation d'état, KOOP et ORFORD (1963) proposent de réunir l'état proprement dit et les paramètres à identifier en un état augmenté que l'on estime globalement. On appelle filtre, un procédé de calcul récurrent, permettant de fournir une estimation des variables d'état d'un système. Le filtre

optimal est le filtre donnant l'estimée de variance minimum et l'on montre (cf. chapitre I) que celle-ci est l'espérance de l'état conditionnelle aux mesures.

Après les premiers travaux de WIENER (1942), fondés sur la représentation par fonctions de corrélation et sur la connaissance des densités spectrales des processus aléatoires, le filtrage a connu un grand succès avec la théorie de KALMAN et BUCY (1960), basée sur la représentation d'état des systèmes linéaires stochastiques. En effet, lorsque les perturbations et l'état initial sont gaussiens, l'estimation optimale est alors obtenue par résolution d'équations récurrentes (cas discret) ou différentielles ordinaires (cas continu). Cependant, lorsque l'on identifie par filtrage, les équations d'état augmenté sont généralement non linéaires (même pour des systèmes linéaires) et, dans ce cas, les probabilités successives de l'état ne sont plus gaussiennes et ne peuvent plus être définies généralement par les deux premiers moments. Les premiers travaux concernant le filtrage non linéaire sont dus à STRATONOVICH (1960), KUSHNER (1964) et BUCY (1965) qui ont montré qu'il était théoriquement possible de déterminer l'équation d'évolution de la densité de probabilité conditionnelle aux mesures. Malheureusement, cette équation ne possède pas de solution explicite (sauf cas spéciaux très simples) et c'est pourquoi de nombreux auteurs ont recherché par des approches différentes des solutions sous-optimales : équations approchées des densités de probabilités ou des deux premiers moments par exemple (JASWINSKI (1965)). Cependant, une classe importante de méthodes postulent comme base de départ des densités de probabilités gaussiennes. On fait alors intervenir uniquement la moyenne et la variance, et la mise en oeuvre à partir d'une linéarisation locale en série de Taylor, au premier ordre (filtre de Kalman étendu : cf. COX (1964) par exemple), ou au second ordre, est alors plus simple. C'est à cette dernière classe que peuvent se rattacher les filtres approchés "discret-discret" (cf. De LARMINAT (1971)) et "continu-discret" que nous utilisons ici.

Dans le chapitre I, nous présentons certaines généralités concernant l'identification par filtrage. Après avoir rappelé certains résultats théoriques bien connus sur le filtrage non linéaire optimal, nous présentons les différentes approches pour déterminer des solutions sous-optimales.

Nous décrivons, au chapitre II, le principe d'un filtre non linéaire discret. La méthode proposée s'appuie sur un développement au second degré en série de Taylor, des non-linéarités autour de l'estimation courante. L'hypothèse gaussienne permet alors de considérer les termes du second ordre comme des grandeurs aléatoires indépendantes et on peut mettre en oeuvre un filtre linéaire optimal à partir des équations linéarisées.

Le chapitre III est consacré au filtrage des systèmes représentés par un modèle continu avec observations discrètes. On déduit de l'équation d'évolution continue un modèle markovien discret auquel on applique le filtre décrit au chapitre II.

Nous abordons, dans le chapitre IV, la mise en oeuvre pratique des filtres non linéaires. La caractéristique essentielle de la méthode employée consiste en une décomposition des équations d'évolution et d'observation en une succession de transformations élémentaires permettant d'appliquer un petit nombre de modules de calcul. Pour un problème donné, le programme se réduit alors à une séquence d'appel aux sous-programmes de base et il n'est pas nécessaire d'entrer dans le détail des équations de filtrage.

Les chapitres V et VI sont consacrés aux applications. La technique de décomposition en opérations élémentaires est appliquée, tout d'abord, à l'identification de la chaîne de tangage d'un avion (fonctions de transferts monovariabiles), puis à l'identification en ligne du générateur de vapeur pilote du Laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, enfin à l'identification des systèmes linéaires, multi-entrées, mono-sortie, représentés par des transmittances discrètes. Le programme général correspondant est testé sur l'enregistrement d'une chaudière de la Centrale de Pont-sur-Sambre (données proposées par J. RICHALET pour le cas test B du Symposium I.F.A.C. de La Haye 1973).

Cependant, la principale application, exposée au chapitre VI, est l'identification de la Tranche 5 de la Centrale E.D.F. de Nantes-Cheviré (contrat D.G.R.S.T. n°72 7 0159). A partir d'essais en boucle fermée avec excitation des points de consigne ou avec injection de signaux binaires dans les chaînes de régulation, on établit un modèle de la pression et des températures de surchauffe et de resurchauffe, dont la structure est déduite directement de la "physique" de la Tranche. Ce chapitre n'est pas consacré uniquement au filtrage non linéaire. Nous y exposons, en détail, tous les problèmes annexes de l'identification, tels que l'acquisition des différentes grandeurs physiques, la modélisation du processus, et le choix des signaux d'excitation.

Dans toutes ces applications, les résultats des simulations, des comparaisons avec d'autres méthodes, et des performances de commandes sur site conforme à la théorie, permettent de valider les modèles trouvés.

Chapitre I

INTRODUCTION A L'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE ET AU FILTRAGE NON LINEAIRE

- 1 - IDENTIFICATION PAR FILTRAGE NON LINEAIRE
- 2 - PRINCIPES GENERAUX DU FILTRAGE NON LINEAIRE
- 3 - LES FILTRES NON LINEAIRES SOUS-OPTIMAUX

Nous exposons dans ce chapitre le principe de l'identification par filtrage, proposé dès 1963 par KOOP et ORFORD et qui consiste à considérer les paramètres comme partie de l'état auquel on applique les techniques d'estimation par filtrage.

Nous abordons ensuite les principes généraux du filtrage non linéaire. Le filtre non linéaire optimal n'étant pas (en général) réalisable pratiquement, on présente enfin les différentes approches pour déterminer des solutions sous-optimales.

1) L'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE NON LINEAIRE -

Le principe de la méthode est maintenant bien connu [5] et consiste à réunir l'état proprement dit d'un processus et les paramètres à identifier en un état augmenté que l'on estime globalement.

Considérons par exemple le processus de la Fig. (I-1) représenté par le système linéaire discret suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k) \quad (I-1)$$

$$\underline{s}_k = \underline{g}(\underline{x}_k, t_k, \underline{u}_k) \quad (I-2)$$

$\underline{x}_k$ est l'état, $\underline{u}_k$ l'entrée, $\underline{s}_k$ la sortie, $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ des perturbations inconnues. Les fonctions $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont linéaires ou non par rapport à $\underline{x}_k$, $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$, et sont caractérisées par un certain nombre de paramètres que nous noterons $\underline{\theta}$.

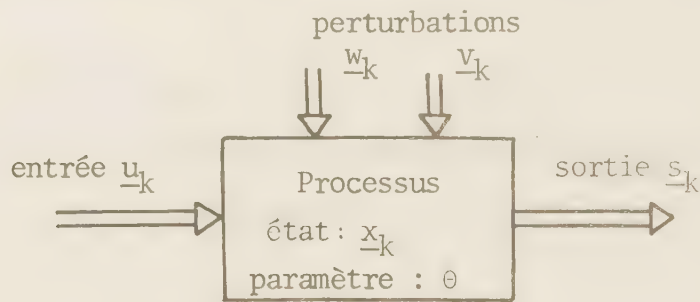


Fig. I-1

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k, \underline{\theta}) \quad (I-3)$$

$$\underline{s}_k = \underline{g}(\underline{x}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{v}_k, \underline{\theta}) \quad (I-4)$$

Le problème de l'identification consiste alors à déterminer la valeur des paramètres $\underline{\theta}$ à partir des enregistrements d'entrée-sortie $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_N\}$, $\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N\}$.

En se plaçant dans un contexte probabiliste quant aux perturbations $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ le problème sera complètement résolu si la probabilité de $\underline{\theta}$ conditionnellement aux mesures peut être calculée. En effet, l'estimée de "vraisemblance maximum" par exemple serait alors obtenue en déterminant la valeur de $\underline{\theta}$ pour laquelle la densité de probabilité conditionnelle est maximum. Cependant il est naturel de choisir comme "estimation optimale" la moyenne conditionnelle $\hat{\underline{\theta}} = E[\underline{\theta} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N]$ car celle-ci est l'estimée de variance minimale. En effet :

$$T_r(E[(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}})(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}})^T / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N]) = E[(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}})^T(\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}) / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N]$$

$$= \hat{\underline{\theta}}^T \hat{\underline{\theta}} - 2 \hat{\underline{\theta}}^T E[\underline{\theta} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N] + E[\underline{\theta}^T \underline{\theta} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N]$$

$$= (\hat{\underline{\theta}} - E[\underline{\theta} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N])^T (\hat{\underline{\theta}} - E[\underline{\theta} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N])$$

$$+ E[\underline{\theta}^T \underline{\theta} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N] - E[\underline{\theta}^T / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N] E[\underline{\theta} / \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_N]$$

dans cette dernière expression, $\hat{\underline{\theta}}$ n'apparaît que dans le premier terme. C'est une forme quadratique dont le minimum zéro est obtenu pour $\hat{\underline{\theta}} = E[\underline{\theta}/\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_N]$.

Introduisons maintenant la notation :

$$\hat{\underline{\theta}}_k = E[\underline{\theta}/\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

$\hat{\underline{\theta}}_k$ est l'estimation optimale disponible à l'instant k sur la base des k premières mesures. Si l'on considère alors $\underline{\theta}$ comme une variable $\underline{\theta}_k$ telle que :

$$\underline{\theta}_{k+1} = \underline{\theta}_k$$

nous obtenons le système suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k, \underline{\theta}_k) \quad (I-5)$$

$$\underline{\theta}_{k+1} = \underline{\theta}_k \quad (I-6)$$

$$\underline{s}_k = \underline{g}(\underline{x}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{v}_k, \underline{\theta}_k) \quad (I-7)$$

$\underline{x}_k$ et $\underline{\theta}_k$ jouent alors formellement un rôle identique et on peut écrire globalement en notant $\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$

$$\underline{z}_{k+1} = \underline{\varphi}(\underline{z}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k) \quad (I-8)$$

$$\underline{s}_k = \underline{h}(\underline{z}_k, t_k, \underline{u}_k, \underline{v}_k) \quad (I-9)$$

le filtrage consiste alors à élaborer un procédé de calcul récurrent permettant d'obtenir :

$$\hat{\underline{z}}_k = E[\underline{z}_k/\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

d'où l'on peut extraire l'estimation désirée des paramètres $\hat{\underline{\theta}}_k$.

Notons que cette approche se généralise à des systèmes non stationnaires, à condition de pouvoir exprimer les variations de $\underline{\theta}$ par une équation telle que :

$$\underline{\theta}_{k+1} = \underline{\psi}(\underline{\theta}_k, t_k, \underline{w}_{\underline{\theta}_k}) \quad (I-10)$$

le plus souvent on se contente d'ailleurs de l'équation :

$$\underline{\theta}_{k+1} = \underline{\theta}_k + \underline{w}_{\underline{\theta}_k} \quad (I-11)$$

où la séquence $\underline{w}_{\underline{\theta}_k}$ est supposée aléatoire indépendante et centrée. (processus de Wiener).

Notons encore que lorsque l'équation d'évolution est continue de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, t, \underline{u}, \underline{w}) \quad (I-12)$$

l'équation (I-6) devient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \underline{0} \quad (I-13)$$

et on peut là encore estimer globalement $\underline{x}$ et $\underline{\theta}$.

2) PRINCIPES GENERAUX DU FILTRAGE NON LINEAIRE

Nous venons de montrer dans le paragraphe précédent que le problème de l'identification des paramètres pouvait se remanier à un problème d'estimation d'état. Considérons donc les systèmes non linéaires discrets, continus ou "continus-discrets" suivants :

- système discret :

$$\underline{z}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{z}_k, \underline{w}_k) \quad (I-14)$$

$$\underline{s}_k = \underline{g}_k(\underline{z}_k, \underline{v}_k) \quad (I-15)$$

où certaines composantes de $\underline{z}_k$ peuvent être des paramètres et où les fonctions $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont non linéaires par rapport à $\underline{z}_k, \underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ (l'indice k de $\underline{f}$ et $\underline{g}$ exprimant aussi bien la non stationnarité que la présence d'une entrée $\underline{u}_k$ connue.

- système continu :

$$\frac{dz}{dt} = \underline{f}(\underline{z}, t, \underline{w}) \quad (I-16)$$

$$\underline{s} = \underline{g}(\underline{z}, t, \underline{v}) \quad (I-17)$$

où $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont non linéaires par rapport à $\underline{z}$, $\underline{w}$ et $\underline{v}$.

- système continu-discret :

$$\frac{dz}{dt} = \underline{f}(\underline{z}, t, \underline{w})$$

$$\underline{s}_k = \underline{g}_k(\underline{z}_k, \underline{v}_k)$$

avec $\underline{f}$ non linéaire par rapport à $\underline{z}$ et $\underline{w}$

Nous supposons connus la probabilité de l'état initial $\underline{z}_0$ et un modèle stochastique des perturbations. Dans le cas discret par exemple, le plus simple est de faire l'hypothèse que $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ sont des séquences aléatoires indépendantes

gaussiennes et centrées de covariances W_k et V_k :

$$W_k = E | \underline{w}_k \underline{w}_k^T |$$

$$V_k = E | \underline{v}_k \underline{v}_k^T |$$

On définit alors un "filtre optimal" comme un procédé de calcul permettant de calculer l'estimée à variance minimale, c'est-à-dire la moyenne conditionnelle :

$$\hat{\underline{z}}_{k/k} = E | \underline{z}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k | = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{z}_k p(\underline{z}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k) dz^1 \dots dz^n$$

dans le cas discret ou continu-discret et dans le cas continu :

$$\hat{\underline{z}} = E | \underline{z} / \underline{s}(\tau); 0 < \tau < t | = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{z} p(\underline{z} / \underline{s}(\tau); 0 < \tau < t) dz^1 \dots dz^n$$

où $p | \underline{z}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k |$ et $p(\underline{z} / \underline{s}(\tau); 0 < \tau < t)$ sont les densités de probabilités conditionnelles aux mesures $\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n\}$ ou $\{\underline{s}(\tau); \forall \tau: 0 < \tau < t\}$ avec $\underline{z} = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{bmatrix}$

On montre (STRATONOVICH [11]) que toute l'information relative à l'estimée optimale est contenue dans la densité de probabilité conditionnelle. Dans le cas gaussien, la probabilité conditionnelle est entièrement définie par ses deux premiers moments. Pour un système linéaire, avec $\underline{z}_0$ gaussien $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ (ou $\underline{w}$ et $\underline{v}$) gaussien les probabilités successives sont gaussiennes et KALMAN [1][2] a montré que l'estimation optimale est obtenue par résolution d'équations récurrentes (cas discret) ou différentielles ordinaires (cas continu) portant sur la moyenne et la covariance de l'état conditionnées par les mesures. Pour un système non linéaire, les probabilités successives ne sont plus gaussiennes et ne peuvent plus être définies généralement par les deux premiers moments. Il est alors théoriquement possible, sous des conditions de régularités convenables, de déterminer l'équation d'évolution de $p(\underline{z} / \underline{s}(\tau); 0 < \tau < t)$ (cas continu) ou des équations récurrentes permettant d'obtenir $p(\underline{z}_{k+1} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k)$ à partir de $p(\underline{z}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k)$ puis $p(\underline{z}_{k+1} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_{k+1})$ à partir de $p(\underline{z}_{k+1} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k)$ (cas discret ou continu-discret) [3] , [4] , [6] , [7] , [10] , [12] , ... etc... Malheureusement, ces équations sont soit des équations aux dérivées partielles (cas continu) ne possédant pas de solutions analytiques, soit des équations intégrales (cas discret) pour lesquelles il n'existe pas de solutions explicites et dont la résolution numérique est pratiquement toujours irréalisable. Il est encore possible de déterminer les équations exactes des deux premiers moments mais ces équations nécessitent la connaissance des moments d'ordre supérieurs à deux et le filtrage non linéaire requiert donc dans le cas général une infi-

nité d'équations pour décrire l'évolution de tous les moments conditionnels. C'est pourquoi de nombreux auteurs ont recherché avec des approches différentes des solutions sous-optimales en faisant intervenir certaines approximations.

3) LES FILTRES NON LINEAIRES SOUS-OPTIMAUX

3-1) Filtres définis par une approximation aussi parfaite que possible des densités de probabilité

Une première approche consiste à rechercher directement une approximation de la densité de probabilité conditionnelle. Pour le filtrage discret, on peut choisir de discrétiser la densité de probabilité sous la forme de "masses ponctuelles" [14] distribuées sur une grille avec un pas à la limite infiniment petit. Pour le filtrage continu ou continu-discret, il s'agit de déterminer une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles, on peut rechercher une solution sous la forme d'une somme à la limite infinie de termes en développant la densité de probabilité sur des bases de fonctions orthogonales, série de polynômes d'Hermite, série de Fourier [6] par exemple. Cependant cette approche nécessite pour sa mise en oeuvre numérique un volume de calcul et de mémoire démesuré dès que la dimension de l'état dépasse un ou deux et ne pourrait être envisagé lors d'une identification (sauf cas spéciaux très simples).

3-2) Filtres définis par une approximation des deux premiers moments

Une autre approche devenue classique [4], [10], [15] consiste en faisant certaines hypothèses sur la densité de probabilité conditionnelle et sur les moments d'ordre élevé, à rechercher une approximation des deux premiers moments à partir de leurs équations d'évolution exactes. Les termes non linéaires étant développés en série de Taylor jusqu'au second ordre. On définit ainsi une classe de filtres appelés "filtres à variance minimale tronqués" [10] [15].

3-3) Filtres déduits de l'hypothèse gaussienne

Il se trouve que sous des conditions assez générales, en particulier lors de l'identification des systèmes stationnaires, la probabilité conditionnelle de l'état tend vers une loi normale quand t (ou k) tend vers l'infini (théorème central limite) :

$$\begin{array}{ll} \underline{z} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} N[\hat{\underline{z}}, M] & \text{cas continu} \\ \underline{z}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} N[\hat{\underline{z}}_{k/k}, M_k] & \text{cas discret ou continu discret} \end{array}$$

En faisant alors l'hypothèse gaussienne sur la densité de probabilité on peut résoudre un système récurrent faisant intervenir uniquement $\hat{z}_{k/k}$ et $M_{k/k}$ (cas discret) ou un système différentiel ordinaire portant seulement sur $\underline{z}$ et M (cas continu). Une méthode largement utilisée consiste ainsi à rechercher une linéarisation locale des fonctions non linéaires f_k et g_k (ou f et g) par exemple en série de Taylor en limitant le développement au premier ordre. On établit alors un filtre de Kalman non stationnaire à partir des équations ainsi obtenues (filtres de Kalman étendus) [16], [17], [18], [19], [20].

On peut aussi approcher les non linéarités par un développement de Taylor dans lequel on retient cette fois les termes jusqu'au deuxième ordre. Ainsi en supposant toujours gaussienne la distribution de la densité conditionnelle et suivant le problème considéré (processus continu ou discret ou encore continu avec observations discrètes) un certain nombre d'algorithmes ont été développés. [6], [8], [20], [21].

C'est à cette dernière classe que peut se rattacher le filtre discret que nous avons adopté et mis en oeuvre et que nous détaillons dans le chapitre suivant. Notons ici que les équations découlent directement des deux hypothèses ci-dessus : normalité de $p(\underline{z}_k/\underline{s}_1, \underline{s}_2 \dots \underline{s}_k)$ et développement au 2ème degré des non linéarités autour de l'estimation courante.

4) CONCLUSION

Le principe de la méthode consiste donc à réunir état et paramètres pour leurs appliquer globalement les techniques d'estimation par filtrage. Cependant, même pour des systèmes linéaires le problème de filtrage est généralement non linéaire. Les équations du filtre non linéaire optimal définissant la densité de probabilité conditionnelle étant soit des équations aux dérivées partielles dans le cas continu, soit des équations intégrales cas discrets ne possédant pas de solutions explicites, nous sommes alors amenés à rechercher des solutions sous-optimales : équations approchées des densités de probabilités ou équations des deux premiers moments par exemple. D'autre part, en faisant l'hypothèse gaussienne, on fait intervenir uniquement la moyenne et la variance et la mise en oeuvre à partir d'une linéarisation locale en série de Taylor, au premier ordre (filtres de Kalman étendus) ou au second ordre est alors plus simple. C'est donc cette hypothèse que nous allons envisager dans le chapitre suivant en vue d'établir un filtre discret avec observations discrètes.

BIBLIOGRAPHIE I

- [1] KALMAN R.E.
"A New approach to linear filtering and prediction problems"
Transactions of the A.S.M.E. Vol. 82, série D (1960)
- [2] KALMAN R.E.
"New results in linear filtering and prediction theory"
Transactions of the A.S.M.E. Vol. 83, série D (1961)
- [3] BUCY R.S.
"Non linear filtering theory"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, AC10 (avril 1965)
- [4] BUCY R.S. et JOSEPH P.O.
"Filtering for stochastic processes with applications to guidance"
John Wiley and Sons (1968)
- [5] KOPP R.E., ORFORD R.J.
"Linear regression applied to system identification for adaptive control systems".
Journal of A.I.A.A., Vol. 1, n° 10, 2 300 - 2 306 (1963)
- [6] ALENGRIN G.
"La théorie du filtrage non linéaire et ses applications au traitement du signal et à l'identification en Automatique"
Thèse de Docteur ès-sciences, Toulouse (1974)
- [7] AGUILAR-MARTIN J.
"Estimation et filtrage dans la modélisation stochastique en Automatique"
Thèse de Docteur ès-sciences, Toulouse (1974).
- [8] De LARMINAT Ph.
"Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Thèse de Docteur ès-sciences, Nantes (1971).
- [9] De LARMINAT Ph, PIASCO J.M.
"Identification par filtrage non linéaire sous-optimal"
Journée AFCET, E.N.S.M. Nantes (25 juin 1971).
- [10] FROIDEVAUX M. et TENCER S.
"Approximation des filtres statistiques non linéaires"
Cahier de l'I.R.I.A. n° 3 (1970)
- [11] STRATONOVICH, R.L.
"Conditional Markov Processes and their Applications to Optimal Control"
Elsevier, New-York, London, Amsterdam (1968).
- [12] KUSHNER H.J.
"Non linear filtering : the exact dynamical equations satisfied by the conditional mode"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control AC12 (octobre 1967)
- [13] AGUILAR-MARTIN J. De LARMINAT Ph.
"Recent Développement in France of Stochastic Filtering and its Application to identification"
Transactions of A.S.M.E. Vol. 96, n° 4 (1974)

- |14| BUCY R.S. et SENNE K.D.
"Digital synthesis of non linear filters"
Automatica, Vol. 7 (1971)
- |15| JAZWINSKI A.H.
"Filtering for non linear dynamical systems"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control AC11 (octobre 1966)
- |16| COX H.
"On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems"
I.E.E.E. Transaction on Automatic Control AC9 (janvier 1964)
- |17| RADIX J.C.
"Introduction au filtrage numérique"
Eyrolles (1970)
- |18| POUJOL A.
"Estimation des termes source et réactivité d'un réacteur nucléaire sous critique par filtre de Kalman étendu"
Journée d'études sur l'estimation en ligne des paramètres de processus sur mini-ordinateur, C.E.N. Saclay (18 avril 1975).
- |19| BRYSON A.E. et HO Y.C.
"Applied optimal control"
Blaisdell Publishing Company (1969).
- |20| SAGE A.P. et MELSA J.L.
"Estimation theory with application to communications and control"
Mc. Graw-Hill (1971).
- |21| ATHANS M. WISHNER R.P. et BERTOLINI A.
"Suboptimal state estimation for continuous-time non linear systems for discrete noisy measurements"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control AC13 (octobre 1968)
- |22| AGUILAR-MARTIN J., ALENGRIN G. et LARCHER S.
"Filtrage non linéaire - Aspects théoriques et algorithmes - Applications"
Rapport D.G.R.S.T. n° 71 7 2665. et 71 7 2666

Chapitre II

LE FILTRAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES REPRESENTES PAR UN MODELE DISCRET AVEC OBSERVATIONS DISCRETES

- 1 - HYPOTHESES DE BASE ET MODELE MATHEMATIQUE ADOPTE
- 2 - DESCRIPTION DU FILTRE NON LINEAIRE
- 3 - DETERMINATION DE L'APPROXIMATION LINEAIRE
- 4 - CAS D'UN BRUIT NON ADDITIF SUR L'ETAT
- 5 - CAS DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS NON LINEAIRES
- 6 - CONCLUSION

Nous présentons ici un filtre non linéaire discret. La méthode proposée s'appuie sur un développement des termes non linéaires en série de Taylor au deuxième ordre autour de l'estimation disponible. A partir de l'hypothèse gaussienne, les termes du second ordre peuvent être considérés comme des grandeurs aléatoires indépendantes et on peut alors appliquer le filtrage linéaire optimal de Kalman sur les équations linéarisées.

1 - HYPOTHESES DE BASE ET MODELE MATHEMATIQUE ADOPTE -

Considérons les processus multivariés susceptibles d'être représentés par le système discret non linéaire stochastique suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k, \underline{w}_k) \quad (\text{II-1})$$

où l'indice k de $\underline{f}$ exprime aussi bien la non stationnarité que la présence d'une entrée $\underline{u}_k$ connue.

$\underline{x}_k$ est l'état de dimension n et $\underline{w}_k$ une séquence indépendante de l'état gaussienne de valeur moyenne nulle et de covariance $\underline{W}_k$

On notera donc :

$$E[\underline{x}_0] = \hat{\underline{x}}_{0/0}$$

$$E[\underline{w}_k] = \underline{0} \quad \forall k$$

$$E[(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})^T] = \underline{M}_{0/0}$$

$$E[\underline{w}_i \underline{w}_j^T] = \underline{W}_i \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

$$E[\underline{w}_k (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})^T] = \underline{0} \quad \forall k$$

Les observations sont aussi supposées non linéaires par rapport à l'état :

$$\underline{s}_k = \underline{g}_k(\underline{x}_k, \underline{v}_k) \quad (\text{II-2})$$

où $\underline{s}_k$ est la mesure de dimension m , $\underline{v}_k$ une séquence indépendante de l'état (et du bruit $\underline{w}_k$) gaussienne de valeur moyenne nulle et de covariance $\underline{V}_k$:

$$\begin{aligned} \text{Soit : } E[\underline{v}_k] &= \underline{0} \quad \forall k \\ E[\underline{v}_i \underline{v}_j^T] &= \underline{V}_i \delta_{ij} \quad \forall i, j \\ E[\underline{v}_k (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})^T] &= \underline{0} \quad \forall k \\ E[\underline{v}_i \underline{w}_j^T] &= \underline{0} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Nous pouvons faire quelques remarques sur la forme mathématique que nous venons d'adopter :

- Il serait bien sûr possible de construire un filtre dans le cas où $\underline{w}_i$ et $\underline{v}_j$ sont corrélés, mais cette hypothèse alourdirait sensiblement les calculs pour finalement ne trouver aucune application (au moins dans ce travail).

- D'autre part, l'équation de mesure est non linéaire. Or celle-ci est souvent linéaire (toujours dans les applications que nous avons été amenés à traiter dans ce mémoire). C'est pourquoi nous allons développer tout d'abord les équations de filtrage pour l'équation d'observation linéaire suivante :

$$\underline{s}_{k+1} = C_k \underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (\text{II-3})$$

où C_k est la matrice d'observation ($\dim C_k = m \times n$) et nous n'envisagerons le cas non linéaire (II-2) qu'en fin de chapitre au paragraphe 5.

- Les équations sont plus simples à écrire dans le cas de bruit additif, c'est pour cela que dans une première étape, nous choisirons l'équation d'état suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \quad (\text{II-4})$$

l'hypothèse de bruit non additif étant envisagée au § 4.

- Nous supposerons enfin que la fonction $\underline{f}_k$ (et $\underline{g}_k$ dans le cas général) est deux fois dérivable par rapport à $\underline{x}_k$ ($\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ dans le cas de bruits non additifs).

- Les propriétés de $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ ont été précisées plus haut et nous considérerons dans ce chapitre que les covariances W_k et V_k sont connues.

2) DESCRIPTION DU FILTRE NON LINEAIRE

Soit le système représenté par les équations (II-3) et (II-4) :

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{f}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \\ \underline{s}_k &= C_k \underline{x}_k + \underline{v}_k \end{aligned}$$

On désire calculer l'espérance mathématique de $\underline{x}_k$ conditionnellement aux mesures (ou au moins une approximation).

Pour le problème linéaire, une solution est donnée par le filtrage de Kalman [1], [2], [5]. La solution que nous utilisons consiste à remplacer l'équation non linéaire (II-4) par une équation linéaire approchée :

$$\underline{x}_{k+1} \approx A_k \underline{x}_k + \underline{u}_k \quad (\text{II-5})$$

où A_k est une matrice ($n \times n$) et $\underline{u}_k$ un vecteur aléatoire gaussien indépendant de l'état de valeur moyenne $\bar{\underline{u}}_k$ et de matrice de covariance Q_k :

$$\begin{aligned} E[\underline{u}_k] &= \bar{\underline{u}}_k \quad \forall k \\ E[(\underline{u}_i - \bar{\underline{u}}_i)(\underline{u}_j - \bar{\underline{u}}_j)^T] &= Q_i \delta_{ij} \quad \forall i, j \\ E[(\underline{u}_i - \bar{\underline{u}}_i)(\underline{x}_j - E[\underline{x}_j])^T] &= 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

la séquence $\underline{u}_k$ sera évidemment indépendante de la séquence $\underline{v}_k$:

$$E[(\underline{u}_k - \bar{\underline{u}}_k)\underline{v}_j^T] = 0 \quad \forall j, k$$

les valeurs de A_k , $\bar{u}_k$ et Q_k seront calculées à partir de la fonction f_k et de la covariance W_k et $\bar{w}_k$.

Le système a alors pour équations ("approchées") :

$$\underline{x}_{k+1} \approx A_k \underline{x}_k + \underline{u}_k$$

$$\underline{s}_k = C_k \underline{x}_k + \underline{v}_k$$

C'est sur ce système que nous mettons en oeuvre le filtre linéaire optimal.

Notons :

$$\hat{\underline{x}}_{k/k} = E[\underline{x}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

$$M_{k/k} = E[(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = E[\underline{x}_{k+1} / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

$$M_{k+1/k} = E[(\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1/k})(\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1/k})^T / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

les équations du filtre de Kalman sont les suivantes : (Cf/RADIX|4|par exemple).

Prédiction :

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = A_k \hat{\underline{x}}_{k/k} + \bar{u}_k \quad (\text{II-6})$$

$$M_{k+1/k} = A_k M_{k/k} A_k^T + Q_k \quad (\text{II-7})$$

Estimation :

$$K_{k+1} = M_{k+1/k} C_{k+1}^T (C_{k+1} M_{k+1/k} C_{k+1}^T + V_{k+1})^{-1} \quad (\text{II-8})$$

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k+1} = \hat{\underline{x}}_{k+1/k} + K_{k+1} (\underline{s}_{k+1} - C_{k+1} \hat{\underline{x}}_{k+1/k}) \quad (\text{II-9})$$

$$M_{k+1/k+1} = M_{k+1/k} - K_{k+1} C_{k+1} M_{k+1/k} \quad (\text{II-10})$$

Ces équations récurrentes ne fournissent compte tenu de la linéarisation (II-5) qu'une approximation de l'espérance conditionnelle de l'état.

$$\hat{\underline{x}}_{k/k} \approx E[\underline{x}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$$

le filtre ainsi obtenu n'est donc qu'approximativement optimal.

Il faut noter que la mise en oeuvre de ce filtre nécessite la connaissance des valeurs initiales :

$$\hat{\underline{x}}_{0/0} = E[\underline{x}_0]$$

$$M_{0/0} = E[(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_{0/0})^T]$$

et des grandeurs A_k , $\bar{u}_k$ et Q_k que nous allons déterminer maintenant.

3) DETERMINATION DE L'APPROXIMATION LINEAIRE

Nous allons présenter dans ce paragraphe, les trois solutions les plus fréquemment utilisées.

1ère solution :

La linéarisation de l'équation (II-4) peut s'effectuer autour d'une solution approchée, dite "nominale" ou de "référence" [4] , [7].

En effet, supposons comme une valeur approchée $\underline{x}_k^*$ de $\underline{x}_k$, les termes A_k et $\underline{u}_k$ seront obtenus par linéarisation autour de cette valeur $\underline{x}_k^*$.

Notons :

$$[F_x^i(\underline{x}_k)]^j = \frac{\partial f^i(\underline{x}_k)}{\partial x^j} \quad \text{et} \quad F_x^{ij}(\underline{x}_k) = \frac{\partial^2 f^i(\underline{x}_k)}{\partial x^j \partial x^i}$$

Effectuons le développement à l'ordre 1 de la fonction f_k au voisinage de $\underline{x}_k^*$.

$$\underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k) + \underline{w}_k$$

$$\underline{x}_{k+1} \approx f_k(\underline{x}_k^*) + F_x(\underline{x}_k^*) (\underline{x}_k - \underline{x}_k^*) + \underline{w}_k \quad (\text{II-11})$$

L'équation ci-dessus s'identifie alors immédiatement à l'équation (II-5) :

$$\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k + \underline{u}_k$$

et

$$A_k = F_x(\underline{x}_k^*)$$

$$\bar{u}_k = f_k(\underline{x}_k^*) - F_x(\underline{x}_k^*) \underline{x}_k^*$$

$$Q_k = W_k$$

2ème solution :

La détermination de la solution "nominale" n'est pas toujours facile, (spécialement dans le cas de l'identification) aussi le développement à l'instant $k+1$ peut s'effectuer autour de l'estimation courante (et disponible à l'instant k) $\hat{\underline{x}}_{k/k}$. Ceci constitue un groupe très important de filtres appelés "filtres de Kalman étendus" [3], [5], [6] , [8].

Si nous nous limitons encore à un développement en série de Taylor tronqué au premier ordre, nous aurons :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\hat{\underline{x}}_{k/k}) + F_x(\hat{\underline{x}}_{k/k})(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) + \underline{w}_k \quad (\text{II-12})$$

d'où :

$$\begin{aligned} A_k &= F_x(\hat{\underline{x}}_{k/k}) \\ \underline{u}_k &= \underline{f}_k(\hat{\underline{x}}_{k/k}) - F_x(\hat{\underline{x}}_{k/k})\hat{\underline{x}}_{k/k} \\ Q_k &= W_k \end{aligned}$$

3ème solution :

Elle consiste à développer l'équation (II-4) toujours au voisinage de $\hat{\underline{x}}_{k/k}$ mais jusqu'au 2ème ordre [8]. Nous allons montrer que sous certaines hypothèses, les termes du 2ème ordre peuvent être pris en compte comme grandeurs aléatoires indépendantes permettant d'obtenir encore une équation linéaire approchée du type (II-5) sur laquelle on peut appliquer le filtrage optimal de Kalman.

Le développement de l'équation (II-4) en série de Taylor tronquée au 2ème ordre est le suivant (pour la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état).

$$\underline{x}_{k+1}^i = \underline{f}_k^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) + F_{xx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k})^T (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) + \frac{1}{2} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T F_{xxx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) + \underline{w}_k^i \quad (\text{II-13})$$

où

$$\left[F_{xx}^i(\underline{x}_k) \right]^{qr} = \frac{\partial^2 f_k^i(\underline{x}_k)}{\partial x^q \partial x^r}$$

Appelons $\underline{r}_k$ le terme du 2ème ordre

$$\underline{r}_k^i = \frac{1}{2} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T F_{xxx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})$$

l'équation (II-13) peut alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = F_x(\hat{\underline{x}}_{k/k})\underline{x}_k + \underline{f}_k(\hat{\underline{x}}_{k/k}) - F_x(\hat{\underline{x}}_{k/k})\hat{\underline{x}}_{k/k} + \underline{r}_k + \underline{w}_k \quad (\text{II-14})$$

En faisant alors l'hypothèse gaussienne sur $\underline{x}_k$, on montre [8] que $\underline{r}_k$ est un vecteur aléatoire indépendant de $\underline{x}_k$ et $\underline{w}_k$ de valeur moyenne $\bar{\underline{r}}_k = E[\underline{r}_k]$ et de covariance :

$$R_k = E[(\underline{r}_k - \bar{\underline{r}}_k)(\underline{r}_k - \bar{\underline{r}}_k)^T]$$

Si l'on utilise le théorème sur le produit de 3 et 4 variables gaussiennes centrées ($E[x_1 x_2 x_3] = 0$; $E[x_1 x_2 x_3 x_4] = E[x_1 x_2] E[x_3 x_4] + E[x_1 x_3] E[x_2 x_4] + E[x_1 x_4] E[x_2 x_3]$).

on peut exprimer la moyenne et la covariance de $\underline{r}_k$ sous la forme [8] :

$$\bar{r}_k^i = \frac{1}{2} T_r(F_{xx}^i(\hat{x}_{k/k})) \quad \text{et}$$

$$R_k^{ij} = \frac{1}{2} T_r(F_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}) M_{k/k} F_{xx}^j(\hat{x}_{k/k}) M_{k/k})$$

Le calcul de A_k , $\bar{u}_k$ et Q_k est alors immédiat : en effet les termes $\bar{r}_k$ et $\bar{w}_k$ étant indépendants de covariances respectives R_k et w_k la covariance du terme $\bar{u}_k$ de l'équation (II-5) sera donc $R_k + W_k$.

En résumé

$$A_k = F_x(\hat{x}_{k/k})$$

$$\bar{u}_k = f_k(\hat{x}_{k/k}) - F_x(\hat{x}_{k/k}) \hat{x}_{k/k} + \bar{r}_k$$

$$Q_k = W_k + R_k$$

C'est cette 3ème solution que nous utiliserons dans toute la suite de ce mémoire.

Du fait de la linéarisation, l'algorithme que nous venons d'établir ne sera qu'approximativement optimal et la convergence (sous les hypothèses énoncées en début de chapitre) ne peut être démontrée.

On remarquera que l'on considère ici l'état x_k comme gaussien. Or à l'inverse du filtrage linéaire optimal, le caractère gaussien n'est pas conservé (même si x_0 est gaussien). Comme nous nous limitons aux moments du premier et deuxième ordre, on posera donc comme hypothèse soit que l'état x_k présente quel que soit k une distribution gaussienne soit que les moments d'ordre supérieur à 2 sont négligeables.

4) CAS D'UN BRUIT NON ADDITIF SUR L'ETAT

Les équations du filtre non linéaire ont été établies au § précédent pour un système stochastique à bruit additif. Nous allons envisager ici le cas des processus susceptibles d'être représentés par l'équation plus générale (II-1) :

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k)$$

avec $\dim x_{k=n}$ et $\dim w_k = p$

Si l'on adopte encore le filtre étendu tronqué au 2ème ordre, le développement de l'équation ci-dessus s'écrit :

$$x_{k+1}^i = f_k^i(\hat{x}_{k/k}, 0) + [F_x^i(\hat{x}_{k/k}, 0)]^T (x_k - \hat{x}_{k/k}) + [F_w^i(\hat{x}_{k/k}, 0)]^T w_k$$

$$+ \frac{1}{2} (x_k - \hat{x}_{k/k})^T F_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}, 0) (x_k - \hat{x}_{k/k}) + \frac{1}{2} (x_k - \hat{x}_{k/k})^T F_{xw}^i(\hat{x}_{k/k}, 0) w_k$$

$$+ \frac{1}{2} w_k^T F_{wx}^i(\hat{x}_{k/k}, 0) (x_k - \hat{x}_{k/k}) + \frac{1}{2} w_k^T F_{ww}^i(\hat{x}_{k/k}, 0) w_k \quad (\text{II-15})$$

développement que l'on effectue au voisinage de $\hat{x}_{k/k}$ pour la variable $\underline{x}_k$ et de 0 pour $\underline{w}_k$ (séquence indépendante et centrée) et où on introduit les notations nouvelles suivantes :

$$[F_{\underline{w}}^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)]^j = \frac{\partial f^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)}{\partial w^j}, \quad F_{\underline{w}}^{ij}(\underline{x}_k, \underline{w}_k) = \frac{\partial^2 f^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)}{\partial w^j \partial w^i}$$

$$[F_{\underline{x}\underline{w}}^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)]^{qr} = \frac{\partial^2 f^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)}{\partial x^q \partial w^r} = [F_{\underline{w}}^{ij}(\underline{x}_k, \underline{w}_k)]^{rq}$$

$$[F_{\underline{w}\underline{w}}^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)]^{qr} = \frac{\partial^2 f^i(\underline{x}_k, \underline{w}_k)}{\partial w^q \partial w^r}$$

Si on appelle encore $\underline{r}_k$ les termes du 2ème ordre, l'équation (II-15) s'écrit :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\hat{x}_{k/k}, 0) + F_{\underline{x}}(\hat{x}_{k/k}, 0)(\underline{x}_k - \hat{x}_{k/k}) + F_{\underline{w}}(\hat{x}_{k/k}, 0)\underline{w}_k + \underline{r}_k \quad (\text{II-16})$$

Si on fait toujours l'hypothèse gaussienne sur $\underline{x}_k$, on démontre alors que $\underline{r}_k$ est encore un vecteur aléatoire indépendant de $\underline{x}_k$ et $\underline{w}_k$ de valeur moyenne $\bar{\underline{r}}_k$ et de covariance R_k :

$$\bar{\underline{r}}_k^i = \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\underline{x}\underline{x}}^i(\hat{x}_{k/k}, 0) M_{k/k}] + \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\underline{w}\underline{w}}^i(\hat{x}_{k/k}, 0) W_k]$$

$$R_k^{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\underline{x}\underline{x}}^i M_{k/k} F_{\underline{x}\underline{x}}^j M_{k/k} + F_{\underline{x}\underline{w}}^i W_k F_{\underline{x}\underline{w}}^j M_{k/k}] + \\ \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\underline{w}\underline{x}}^i M_{k/k} F_{\underline{w}\underline{x}}^j W_k + F_{\underline{w}\underline{w}}^i W_k F_{\underline{w}\underline{w}}^j W_k]$$

Les termes A_k , $\bar{\underline{u}}_k$ et Q_k prendrons donc dans ce cas la forme suivante :

$$A_k = F_{\underline{x}}(\hat{x}_{k/k}, 0)$$

$$\bar{\underline{u}}_k = \underline{f}_k(\hat{x}_{k/k}, 0) - F_{\underline{x}}(\hat{x}_{k/k}, 0)\hat{x}_{k/k} + \bar{\underline{r}}_k$$

$$Q_k = F_{\underline{w}}(\hat{x}_{k/k}, 0) W_k F_{\underline{w}}^T(\hat{x}_{k/k}, 0) + R_k$$

On remarquera que l'on introduit ici une hypothèse supplémentaire : $\underline{f}_k(\underline{x}_k, \underline{w}_k)$ deux fois dérivable par rapport à $\underline{x}_k$ et $\underline{w}_k$.

On aura pu faire intervenir un état augmenté $\underline{z}_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ -\underline{w}_k \end{bmatrix}$

l'équation (II-1) devient dans ce cas là : $\underline{z}_{k+1} = \underline{h}_k(\underline{z}_k)$, relation à partir de laquelle les équations du filtre avec bruit additif donnent bien sûr les mêmes résultats.

5) CAS DES EQUATIONS D'OBSERVATIONS NON LINEAIRES

Nous avons choisi dans une première étape, d'écrire les équations de filtrage sur des systèmes où l'observation était linéaire par rapport à l'état. Nous allons envisager maintenant le cas où les équations d'état et de mesure sont toutes deux non linéaires. Nous développerons les calculs pour des bruits additifs, ceci uniquement dans un but de clarté du texte, mais il est facile d'imaginer ce que devient le filtre dans le cas plus général où le processus est décrit par les équations (II-1) et (II-2).

Considérons donc les systèmes multivariés susceptibles d'être représentés par :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \quad (\text{II-4})$$

$$\underline{s}_{k+1} = \underline{g}_k(\underline{x}_k) + \underline{v}_k$$

avec $\dim \underline{x}_k = n$ et $\dim \underline{s}_k = m$

Les hypothèses faites sur $\underline{w}_k$ et $\underline{v}_k$ étant celles énoncées au paragraphe 1, c'est-à-dire, séquences gaussiennes indépendantes centrées et de covariances respectives $\underline{W}_k$ et $\underline{V}_k$.

1ère solution :

Nous allons remplacer les équations (II-4) et (II-17) par des équations linéaires approchées :

$$\underline{x}_{k+1} \approx \underline{A}_k \underline{x}_k + \underline{u}_k \quad (\text{II-5})$$

$$\underline{s}_k \approx \underline{C}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (\text{II-18})$$

où $\underline{u}_k$ est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de l'état de valeur moyenne $\bar{\underline{u}}_k$ et de covariance $\underline{Q}_k$:

$$\begin{aligned} E[\underline{u}_k] &= \bar{\underline{u}}_k \quad \forall k \\ E[(\underline{u}_i - \bar{\underline{u}}_i)(\underline{u}_j - \bar{\underline{u}}_j)^T] &= \underline{Q}_i \delta_{ij} \quad \forall i, j \\ E[(\underline{u}_i - \bar{\underline{u}}_i)(\underline{x}_j - E(\underline{x}_j))^T] &= 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

et où $\underline{v}_k$ est une séquence gaussienne indépendante de moyenne $\bar{\underline{v}}_k$ et de covariance $\underline{P}_k$.

$$\begin{aligned} E[\underline{v}_k] &= \bar{\underline{v}}_k \quad \forall k \\ E[(\underline{v}_i - \bar{\underline{v}}_i)(\underline{v}_j - \bar{\underline{v}}_j)^T] &= \underline{P}_i \delta_{ij} \quad \forall i, j \\ E[(\underline{v}_i - \bar{\underline{v}}_i)(\underline{x}_j - E(\underline{x}_j))^T] &= 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

La détermination des approximations linéaire se fait en utilisant l'une des trois solutions du paragraphe 3.

Sur ce système linéarisé, nous mettons alors en oeuvre le filtre optimal de Kalman.

$$\begin{aligned} \text{prédiction : } \quad \hat{\underline{x}}_{k+1/k} &= A_k \hat{\underline{x}}_{k/k} + \bar{u}_k \\ M_{k+1/k} &= A_k M_{k/k} A_k^T + Q_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{estimation : } \quad K_{k+1} &= M_{k+1/k} C_{k+1}^T (C_{k+1} M_{k+1/k} C_{k+1}^T + P_k)^{-1} \\ \hat{\underline{x}}_{k+1/k+1} &= \hat{\underline{x}}_{k+1/k} + K_{k+1} (\underline{s}_{k+1} - C_{k+1} \hat{\underline{x}}_{k+1/k} - \bar{v}_{k+1}) \\ M_{k+1/k+1} &= M_{k+1/k} - K_{k+1} C_{k+1} M_{k+1/k} \end{aligned}$$

2ème solution :

On introduit l'équation d'observation dans le système d'état pour se ramener à une équation de mesure linéaire :

On pose :

$$\underline{\xi}_k = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{y}_k \\ \underline{z}_k \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \underline{y}_k &= \underline{w}_k \\ \underline{z}_k &= \underline{g}_k(\underline{x}_k) + \underline{v}_k \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{x}_k) + \underline{y}_k \\ \underline{y}_{k+1} = \underline{w}_{k+1} \\ \underline{z}_{k+1} = \underline{g}_{k+1}(\underline{f}_k(\underline{x}_k) + \underline{y}_k) + \underline{v}_{k+1} \end{cases}$$

$$\underline{s}_k = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{y}_k \\ \underline{z}_k \end{bmatrix}$$

Soit

$$\underline{\xi}_k = \underline{h}_k(\underline{\xi}_k) + \underline{n}_k$$

$$\underline{s}_k = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \underline{\xi}_k$$

l'équation d'état est non linéaire, la forme de la fonction $\underline{h}_k$ ne dépend que de $\underline{f}_k$ et $\underline{g}_k$ et $\underline{n}_k$ est une séquence gaussienne indépendante, centré de covariance :

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & W_{k+1} & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & V_{k+1} \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure étant maintenant linéaire par rapport à l'état (pas de bruit), nous pouvons mettre en oeuvre le filtre décrit aux § 2 et 3.

On peut montrer facilement que les deux solutions conduisent aux mêmes équations de filtrage.

En effet, remplaçons les équations d'état non linéaires par les équations linéaires approchées suivantes :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k + \underline{u}_k \\ \underline{y}_{k+1} = \underline{w}_{k+1} \\ \underline{z}_{k+1} = C_{k+1} (A_k \underline{x}_k + \underline{u}_k) + \underline{v}_{k+1} \end{cases}$$

les séquences $\underline{u}_k$ et $\underline{v}_k$ ayant les propriétés déjà décrites dans la solution n° 1.

Les équations du filtre optimal de Kalman, appliquées au système ci-dessus donnent alors :

prédiction :

$$\begin{cases} \hat{\underline{x}}_{k+1/k} = A_k \hat{\underline{x}}_{k/k} + \bar{\underline{u}}_k \\ \hat{\underline{y}}_{k+1/k} = \underline{0} \\ \hat{\underline{z}}_{k+1/k} = C_{k+1} (A_k \hat{\underline{x}}_{k/k} + \bar{\underline{u}}_k) + \bar{\underline{v}}_{k+1} \end{cases}$$

Notons $\mathcal{M}_k$ la covariance de $\underline{\xi}_k$

$$\mathcal{M}_{k+1/k} = \begin{bmatrix} A_k M_{k/k} A_k^T + Q_k & \underline{0} & (A_k M_{k/k} A_k^T + Q_k) C_{k+1}^T \\ \hline \underline{0} & W_{k+1} & \underline{0} \\ \hline C_{k+1} (A_k M_{k/k} A_k^T + Q_k) C_{k+1}^T + V_{k+1} & \underline{0} & \end{bmatrix}$$

soit :

$$\mathcal{M}_{k+1/k} = \begin{bmatrix} M_{k+1/k} & \underline{0} & M_{k+1/k} C_{k+1}^T \\ \hline \underline{0} & W_{k+1} & \underline{0} \\ \hline C_{k+1} M_{k+1/k} C_{k+1}^T + V_{k+1} & \underline{0} & \end{bmatrix}$$

estimation :

$$\mathcal{K}_{k+1} = \mathcal{M}_{k+1/k} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \mathcal{M}_{k+1/k} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{1} \end{bmatrix} + \underline{0} \right)^{-1} \quad \text{soit}$$

$$\mathcal{K}_{k+1} = \begin{bmatrix} M_{k+1/k} C_{k+1}^T & \\ \hline 0 & \\ \hline C_{k+1} M_{k+1/k} C_{k+1}^T + V_{k+1} & \end{bmatrix} (C_{k+1} M_{k+1/k} C_{k+1}^T + V_{k+1})^{-1} = \begin{bmatrix} K_{k+1} & \\ \hline 0 & \\ \hline 1 & \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (s_{k+1} - \hat{z}_{k+1/k})$$

soit

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (s_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{k+1/k} - \bar{v}_{k+1}) \\ \hat{y}_{k+1/k+1} = 0 + 0 = 0 \\ \hat{z}_{k+1/k+1} = \hat{z}_{k+1/k} + 1 (s_{k+1} - \hat{z}_{k+1/k}) = s_{k+1} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{M}_{k+1/k+1} = \mathcal{M}_{k+1/k} - \mathcal{K}_{k+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}_{k+1/k}$$

dont le calcul (fastidieux) que nous ne faisons pas figurer donne :

$$\begin{bmatrix} M_{k+1/k} - K_{k+1} C_{k+1} M_{k+1/k} & 0 & 0 \\ \hline & W_{k+1} & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $M_{k+1/k+1} = M_{k+1/k} - K_{k+1} C_{k+1} M_{k+1/k}$

Les deux solutions conduisent aux mêmes résultats si l'on part bien sûr des mêmes équations linéarisées. Ces développements en série de Taylor pourront être calculés à l'instant $k+1$ au voisinage de $\hat{x}_{k/k}$ pour la fonction f_k et autour de $\hat{x}_{k+1/k}$ pour l'observation g_k .

6) CONCLUSIONS

La méthode de filtrage que nous venons de décrire pour les systèmes non linéaires représentés par un modèle discret avec observations discrètes consiste à développer les non linéarités en série de Taylor jusqu'au second ordre autour de l'estimation courante. L'hypothèse gaussienne permet alors de considérer les termes du second ordre comme des grandeurs aléatoires indépendantes faisant intervenir uniquement la moyenne et la variance de l'état, et les dérivées secondes des termes non linéaires. On peut alors appliquer un filtre optimal de Kalman aux équations linéaires ainsi obtenues. Il faut cependant noter qu'une

fonction non linéaire de termes gaussiens n'est pas une variable aléatoires gaussienne, ce qui contredit l'hypothèse et la réduit à une approximation. Cette approximation est d'autant meilleure que la linéarisation est mieux justifiée (termes du 2ème ordre petits), c'est-à-dire lorsque les effets non-linéaires ne sont pas prépondérants (dérivées secondes petites) ou lorsque les variances sont petites.

BIBLIOGRAPHIE II

- |1| KALMAN R.E.
"A new approach to linear filtering and prediction problems"
Transaction of the A.S.M.E., Vol. 82, série D (1960)
- |2| KALMAN R.E.
"New results in linear filtering and prediction theory"
Transaction of the A.S.M.E., Vol. 83, série D (1961)
- |3| BRYSON A.E. et HO Y.C.
"Applied Optimal Control"
Ginn-Blaisdell (1969)
- |4| RADIX J.C.
"Introduction au filtrage numérique"
Eyrolles (1970)
- |5| MORRISON N.
"Introduction to the sequential smothing and prediction"
Mc Graw-Hill (1969)
- |6| EYKHOFF P.
"System identification - Parameter and state estimation"
Wiley (1974)
- |7| SAGE A.P. et MELSA J.L.
"Estimation theory with applications to communications and control"
Mc Graw-Hill (1971)
- |8| De LARMINAT Ph.
"Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Thèse de Docteur ès-Sciences, Nantes (1971)

Chapitre III

LE FILTRAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES REPRESENTES PAR UN MODELE CONTINU AVEC OBSERVATIONS DISCRETES

- 1 - HYPOTHESES DE BASE ET MODELE MATHEMATIQUE ADOPTE
- 2 - DESCRIPTION DU FILTRE NON LINEAIRE
- 3 - CALCUL DU TERME CORRECTIF

Pour les filtres continus-discrets, on peut chercher à approcher l'évolution de la moyenne et de la covariance entre deux instants d'observations, sous la forme d'équations différentielles ordinaires. Cependant, ces relations conduisent, pour des problèmes d'identification même moyens, à une mise en oeuvre assez lourde. Nous proposons, dans ce chapitre, de déduire de l'équation d'évolution continue un système discret auquel nous appliquons le filtre décrit précédemment.

1) HYPOTHESES DE BASE ET MODELE MATHEMATIQUE ADOPTE

Considérons les processus multivariés susceptibles d'être représentés par une équation différentielle stochastique du type :

$$d\underline{x}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t), t] dt + d\underline{\beta}(t) \quad (\text{III-1})$$

définie indifféremment au sens de ITÔ ou de STRATONOVICH [2], [6], [9], et dans laquelle :

$\underline{x}(t)$ est l'état de dimension n , t le temps et $\underline{\beta}(t)$ un processus de Wiener-Levy (mouvement Brownien) indépendant, de covariance $Q(t)$.

Si on appelle $\underline{\beta}'(t)$ la dérivée formelle de $\underline{\beta}(t)$, on aura donc :

$$\frac{d\underline{\beta}(t)}{dt} = \underline{\beta}'(t) \text{ avec :}$$

$$E[\underline{\beta}'(t)] = \underline{0} \quad \forall t$$

$$E[\underline{\beta}'(t) - \underline{\beta}'(\tau)] [\underline{\beta}'(t) - \underline{\beta}'(\tau)]^T = Q(t) \delta(t-\tau)$$

Nous aurions pu choisir une équation différentielle stochastique plus générale du type :

$$d\underline{x}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t), t] dt + \underline{g}[\underline{x}(t), t] d\underline{\beta}(t)$$

Cependant, lors de l'application à l'identification, la variance des bruits est supposée connue (ou estimée par un procédé simplifié : chapitre IV, paragraphe 5). Aussi, nous adoptons pour caractériser les bruits sur l'état un simple processus de Wiener additif.

Les observations sont supposées discrètes et, là encore, non linéaires par rapport à l'état :

$$\underline{s}(t_k) = \underline{h}[\underline{x}(t_k), t_k] + \underline{v}_k \quad (\text{III-2})$$

où $\underline{s}(t_k)$ est la séquence des observations de dimension m et supposée échantillonnée avec un pas faible vis-à-vis de la rapidité d'évolution du système. $\underline{v}_k$ est une séquence indépendante, de valeur moyenne nulle et de covariance V_k .

$$E[\underline{v}_k] = \underline{0} \quad \forall k$$

$$E[\underline{v}_i \underline{v}_j^T] = V_i \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

Nous avons choisi, par souci d'homogénéité avec l'équation d'évolution, une équation d'observation avec bruit additif. Cependant, nous aurions pu garder la forme générale de l'équation d'observation discrète (II-2) que nous avons adoptée au chapitre II, la méthode que nous allons exposer ici se référant au filtre discret-discret.

2) DESCRIPTION DU FILTRE NON LINEAIRE

Le calcul différentiel stochastique et l'utilisation des résultats de BUCY [1], STRATONOVICH [2], et KUSHNER [3] permettent, à partir des équations d'évolution et d'observation, d'exprimer la densité de probabilité conditionnelle à la mesure. Malheureusement, la réalisation pratique d'un tel filtre optimal non linéaire est impossible, car tous les moments sont nécessaires pour décrire complètement la densité de probabilité conditionnelle.

Une approche souvent utilisée [1], [4], [5], [6] pour la réalisation pratique de filtres sous-optimaux consiste à utiliser des développements en série de Taylor jusqu'au second ordre pour exprimer les équations des deux premiers moments.

JAZWINSKI [4], par exemple, construit un filtre à variance minimale tronqué, gaussien, où, à partir de l'hypothèse que les moments du 3ème et 4ème ordre sont négligeables, il écrit les équations d'évolution de la moyenne et de la covariance entre deux observations successives.

Ces équations ont la forme suivante :

$$d\underline{\hat{x}}(t) = \underline{f}[\underline{\hat{x}}(t), t] dt + \underline{u}[\underline{\hat{x}}(t), M(t), t] dt \quad (\text{III-3})$$

$$dM(t) = F_x[\underline{\hat{x}}(t), t] M(t) dt + M(t) F_x^T[\underline{\hat{x}}(t), t] dt + Q(t) dt \quad (\text{III-4})$$

où :

$$F_x^{ij}[\underline{x}(t), t] = \frac{\partial f^i[\underline{x}(t), t]}{\partial x^j}$$

$$\text{et} \quad u^i[\underline{\hat{x}}(t), M(t), t] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M^{kj}(t) \frac{\partial f^i[\underline{\hat{x}}(t), t]}{\partial x^k \partial x^j}$$

Ces équations qui sont simples dans la forme nécessitent la résolution d'un système différentiel d'ordre $n(n+1)$. Les équations du filtrage peuvent alors être résolues de manière hybride : le système différentiel (III-3), (III-4) étant câblé sur une console analogique et le traitement des observations s'effectuant sur calculateur numérique. Il faut noter, cependant, qu'un problème d'identification moyen (état généralisé de dimension voisine de 10) nécessite par cette méthode de gros moyens analogiques (110 intégrateurs). De même, la résolution numérique du système différentiel demande un volume de calcul important, dès que n dépasse quelques unités, dans le cas où l'on n'utilise pas une discrétisation élémentaire (1er ordre). Aussi, nous proposons de discrétiser d'emblée les équations du modèle. Nous recherchons alors l'équation discrète "équivalente" à l'équation différentielle stochastique (III-1) :

$$d\underline{x}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t), t] dt + d\underline{\beta}(t)$$

sous la forme :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{g}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \quad (\text{III-5})$$

où $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$ et où $\underline{w}_k$ est une séquence aléatoire indépendante de valeur moyenne nulle et de covariance $\underline{W}_k$.

Le problème consiste alors à déterminer la fonction $\underline{g}_k$ et la covariance $\underline{W}_k$.

On peut écrire, à partir de l'équation d'évolution continue :

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{f}[\underline{x}(\tau), \tau] d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\underline{\beta}(\tau) \quad (\text{III-6})$$

On peut interpréter la relation ci-dessus comme une équation récurrente entre $\underline{x}(t_{k+1})$, $\underline{x}(t_k)$ et $\underline{\beta}(\tau)$ pour τ compris entre t_k et t_{k+1} :

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{g}[\underline{x}(t_k), t_k, \underline{\beta}(\tau \in [t_k, t_{k+1}])] \quad (\text{III-7})$$

Malheureusement, il n'existe pas pour la relation ci-dessus de solution explicite du type (III-5) et il nous faut, à ce stade, faire intervenir des approximations.

2-1) Approximation du premier ordre :

L'intégrale stochastique (III-1) peut être considérée, au sens de ITÔ, comme la limite de l'équation récurrente suivante :

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{x}(t_k) + T \underline{f}[\underline{x}(t_k), t_k] + (\underline{\beta}(t_{k+1}) - \underline{\beta}(t_k)) \quad (\text{III-8})$$

pour T petit (par rapport au temps d'évolution du système), on aura donc l'approximation au premier ordre suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T \underline{f}[\underline{x}_k, t_k] + \underline{w}_k \quad (\text{III-9})$$

équation dans laquelle $T = t_{k+1} - t_k$ et où $\underline{w}_k$ est une séquence aléatoire centrée de variance :

$$\underline{W}_k = T \underline{Q}(t_k)$$

2-2) Approximations d'ordre supérieur

La discrétisation au premier ordre n'étant plus suffisante lorsque T n'est pas extrêmement petit, on peut envisager des approximations d'ordre supérieur faisant intervenir un développement polynômial en T . Toutefois, dès le 2ème ordre, la discrétisation conduit à une formulation complexe (voir De LARMINAT [7], pp. 38, 39, 40 ; par exemple) et difficilement exploitable. Aussi, nous allons choisir maintenant un modèle stochastique différent de (III-1)

qui nous permettra de déterminer les équations d'un filtre dont la mise en oeuvre est plus aisée. En effet, sauf informations précises sur le système, le modèle stochastique est toujours plus ou moins hypothétique. Nous choisissons donc de déterminer directement une équation récurrente sous la forme :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{g}(\underline{x}_k, t_k) + \underline{w}_k \quad (\text{III-10})$$

où $\underline{g}(\underline{x}_k, t_k)$ est la solution exacte pour $t = t_{k+1}$ de l'équation (III-1) initialisée par $\underline{x}(t_k) = \underline{x}_k$, où le processus de Wiener $\underline{\beta}(t) = \underline{0}$:

$$d\underline{x}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t), t] dt, \quad (\text{III-11})$$

et où $\underline{w}_k$ est maintenant, par hypothèse, une séquence centrée indépendante de $\underline{x}_k$ et de variance $\underline{W}_k$. Cette nouvelle hypothèse est bien sûr incompatible avec le modèle stochastique (III-1), néanmoins, les linéarisations au premier ordre sont identiques, à condition de poser : $\underline{W}_k = T Q(t_k)$.

Nous considérons donc à présent que le modèle stochastique est donné d'emblée sous la forme (III-10), avec la variance de $\underline{w}_k$ donnée a priori.

Ecrivons maintenant (III-10) sous la forme d'un développement polynômial en T . D'après (III-11), nous avons :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T \underline{f}[\underline{x}_k, t_k] + \underline{c}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \quad (\text{III-12})$$

où $\underline{c}_k$ englobe tous les termes d'ordre supérieur ou égal à deux dans le développement ; les deux premiers étant, en effet, ceux de l'approximation au premier ordre. Analysons ce terme $\underline{c}_k$, pour cela effectuons un développement en série de Taylor au 2ème ordre autour de $\underline{x}_k = \hat{\underline{x}}_{k/k} = E[\underline{x}_k / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k]$:

$$\begin{aligned} \underline{c}_k^i(\underline{x}_k) &= \underline{c}_k^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) + [\underline{c}_x^i(\hat{\underline{x}}_{k/k})]^T (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T \underline{C}_{xx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

avec :

$$[\underline{c}_x^i]^j = \frac{\partial \underline{c}_k^j(\underline{x}_k)}{\partial x_k^i} \quad \underline{C}_x^{ij}(\underline{x}_k) = \frac{\partial \underline{c}_k^i(\underline{x}_k)}{\partial x_k^j}$$

et

$$[\underline{C}_{xx}^i]^{qr} = \frac{\partial \underline{c}_k^i(\underline{x}_k)}{\partial x_k^q \partial x_k^r}$$

Si l'on fait l'hypothèse gaussienne sur $\underline{x}_k$, on montre (chapitre II, paragraphe 3) que le terme du 2ème ordre de l'équation (III-13) est un vecteur aléatoire indépendant de $\underline{x}_k$, de moyenne $\bar{\underline{r}}_k$ et de covariance $\underline{R}_k$ telles que :

$$\begin{aligned} \bar{\underline{r}}_k^i &= \frac{1}{2} T_r (\underline{C}_{xx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) \underline{M}_{k/k}) \\ \underline{R}_k^{ij} &= \frac{1}{2} T_r (\underline{C}_{xx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) \underline{M}_{k/k} \underline{C}_{xx}^j(\hat{\underline{x}}_{k/k}) \underline{M}_{k/k}) \end{aligned}$$

avec :

$$M_{k/k} = E | (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k)$$

d'où l'espérance de la composante n°i de $\underline{c}_k$:

$$\hat{c}_k^i = E | c_k^i(\underline{x}_k) / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k | = c_k^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) + \frac{1}{2} T_r (C_{xx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) M_{k/k}) \quad (\text{III-14})$$

et la covariance de $\underline{c}_k$ (ligne i, colonne j) :

$$\begin{aligned} E | (c_k^i(\underline{x}_k) - \hat{c}_k^i) (c_k^j(\underline{x}_k) - \hat{c}_k^j) / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k | &= [C_x^i(\hat{\underline{x}}_{k/k})]^T M_{k/k} C_x^j(\hat{\underline{x}}_{k/k}) \\ &+ \frac{1}{2} T_r (C_{xx}^i(\hat{\underline{x}}_{k/k}) M_{k/k} C_{xx}^j(\hat{\underline{x}}_{k/k}) M_{k/k}) \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

Ces expressions font intervenir les grandeurs C_x et C_{xx}^i et conduisent à une mise en oeuvre assez lourde.

Remarquons, cependant, que le terme $\underline{c}_k$ est d'ordre deux en T, avec T petit. De plus, $M_{k/k}$ est relativement petit (sinon toutes les approximations du filtrage non linéaire sont fortement erronées : voir chapitre II). On se propose donc de négliger la variance de $\underline{c}_k$ devant celle des termes du premier ordre, et de prendre comme approximation de l'espérance :

$$\hat{\underline{c}}_k \approx \underline{c}_k(\hat{\underline{x}}_{k/k}) \quad (\text{III-16})$$

Nous conservons donc uniquement dans les équations l'espérance $\hat{\underline{c}}_k$ des termes d'ordre supérieur ou égal à deux en T, ceci afin d'éliminer un biais du résultat final.

Il faut remarquer, d'autre part, que $\hat{\underline{c}}_k$ (donné par III-16) est déduit de la solution exacte de l'équation différentielle ordinaire :

$$d\underline{x}(t) = f[\underline{x}(t), t] dt \quad (\text{III-17})$$

En effet, notons $\underline{x}_{k+1}^*$ la solution pour t_{k+1} de l'équation différentielle ci-dessus, obtenue à partir de la condition initiale $\underline{x}(t_k) = \hat{\underline{x}}_{k/k}$; alors :

$$\hat{\underline{c}}_k = \underline{x}_{k+1}^* - (\hat{\underline{x}}_{k/k} + T f(\hat{\underline{x}}_{k/k}, t_k)) \quad (\text{III-18})$$

Nous proposons donc d'utiliser l'approximation suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T f[\underline{x}_k, t_k] + \hat{\underline{c}}_k + \underline{w}_k \quad (\text{III-19})$$

équation analogue à (III-9), où nous introduisons le terme $\hat{\underline{c}}_k$ calculé à partir de (III-18).

$\underline{w}_k$ est ici une séquence aléatoire indépendante centrée, de covariance W_k donnée.

C'est sur l'équation (III-19) citée précédemment, à laquelle nous ajoutons l'équation d'observation discrète (III-3), que nous appliquons maintenant le filtre discret du chapitre II.

On disposera donc, à chaque instant t_k , d'une approximation de la moyenne et de la covariance de l'état conditionnellement aux mesures.

C'est à partir de l'espérance conditionnelle $\hat{x}_{k/k}$ que nous allons déterminer maintenant le terme $\hat{c}_k$.

3) CALCUL DU TERME CORRECTIF

Comme nous l'avons précisé plus haut, le terme correctif $\hat{c}_k$ intervenant dans l'équation (III-19) est calculé à chaque étape du filtre, à partir de la condition initiale $\underline{x}(t_k) = \hat{x}_{k/k}$:

$$\hat{c}_k = \underline{x}_{k+1}^* - (\hat{x}_{k/k} + T f[\hat{x}_{k/k}, t_k]) \quad (\text{III-18})$$

dans cette relation, le premier terme est déduit directement de l'équation d'évolution continue (III-17), le deuxième de l'équation d'évolution discrétisée au premier ordre.

On peut, à ce stade, envisager une réalisation hybride du filtre. Le système différentiel (III-17) étant câblé sur une console analogique, nous pouvons disposer à tout instant de $\underline{x}^*(t)$. Le calculateur numérique effectue, à chaque instant d'observation, les calculs correspondant à la détermination de $\hat{c}_k$ (III-14) et aux équations du filtre discret. Ce dernier fournissant une nouvelle estimation de l'état, on peut alors recommencer la résolution analogique de (III-17) à partir de cette nouvelle condition initiale.

On peut, d'autre part, et c'est la solution que nous avons retenue, appliquer une méthode numérique de résolution de système différentiel pour déterminer $\hat{c}_k$.

Nous avons adopté la méthode de RUNGE-KUTTA [8], dans laquelle on calcule successivement les termes suivants :

$$\begin{aligned} \underline{k}_1 &= f(\hat{x}_{k/k}, t_k) \\ \underline{k}_2 &= f(\hat{x}_{k/k} + \frac{T}{3} \underline{k}_1, t_k + \frac{1}{3} T) \\ \underline{k}_3 &= f(\hat{x}_{k/k} - \frac{T}{3} \underline{k}_1 + T \underline{k}_2, t_k + \frac{2}{3} T) \\ \underline{k}_4 &= f(\hat{x}_{k/k} + T \underline{k}_1 - T \underline{k}_2 + T \underline{k}_3, t_k + T) \end{aligned}$$

la période T étant celle adoptée pour la discrétisation :

$$T = t_{k+1} - t_k$$

alors :

$$\underline{x}_{k+1}^* = \underline{\hat{x}}_{k/k} + \frac{1}{8} T (\underline{k}_1 + 3 \underline{k}_2 + 3 \underline{k}_3 + \underline{k}_4)$$

d'après (III-18), on a :

$$\underline{\hat{c}}_k = \underline{\hat{x}}_{k/k} + \frac{1}{8} T (\underline{k}_1 + 3 \underline{k}_2 + 3 \underline{k}_3 + \underline{k}_4) - \underline{\hat{x}}_{k/k} - T f[\underline{\hat{x}}_{k/k}, t_k]$$

soit :

$$\underline{\hat{c}}_k = \frac{1}{8} T (-7 \underline{k}_1 + 3 \underline{k}_2 + 3 \underline{k}_3 + \underline{k}_4) \quad (\text{III-20})$$

4) CONCLUSION

Le filtre que nous venons de décrire pour les systèmes représentés par un modèle continu, avec observations discrètes, consiste à traduire l'équation différentielle stochastique par un modèle markovien discret. Lorsque T est petit par rapport au temps d'évolution du système, on se contente d'une approximation au premier ordre. Dans le cas où T n'est pas extrêmement petit, on fait alors intervenir un terme correctif d'ordre supérieur ou égal à deux en T . On remarquera que l'augmentation de la complexité du filtre, par rapport à l'approximation au premier ordre, porte uniquement sur l'espérance conditionnelle $\underline{\hat{x}}_{k/k}$, à laquelle il suffit d'ajouter le terme correctif $\underline{\hat{c}}_k$.

Dans le cas limite où la période d'observation est grande par rapport à la rapidité d'évolution du système, on pourra être amené à adopter une discrétisation plus fine entre deux instants d'observation.

BIBLIOGRAPHIE III

- [1] BUCY R.S. et JOSEPH P.D.
"Filtering for stochastic processes with applications to guidance"
John Wiley and Sons, (1968).
- [2] STRATONOVICH R.L.
"Conditional Markov processes and their applications to optimal control"
Elsevier, (1968).
- [3] KUSHNER H.J.
"Non linear filtering : the exact dynamical equations satisfied by the
conditional mode"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control (juin 1967).
- [4] JAZWINSKI A.H.
"Filtering for non linear dynamical systems"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control (octobre 1966).
- [5] ALENGRIN G.
"La théorie du filtrage non linéaire et ses applications au traitement du
signal et à l'identification en automatique"
Thèse de Docteur-ès-Sciences - Toulouse (1974).
- [6] FROIDEVAUX M. et TENCER S.
"Approximation des filtres statistiques non linéaires"
Cahier de l'I.R.I.A. n°3 (1970).
- [7] De LARMINAT Ph.
"Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Thèse de Docteur-ès-Sciences, Nantes (1971).
- [8] BOUDAREL R., DELMAS J., et GUICHET P.
"Commande optimale des processus"
Dunod, (1968).
- [9] JAZWINSKI A.H.
"Stochastic processes and filtering theory"
Academic Press, (1970).

Chapitre IV

MISE EN OEUVRE DES EQUATIONS DE FILTRAGE

- 1 - PRINCIPE DE DECOMPOSITION EN OPERATIONS ELEMENTAIRES
- 2 - LES TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DE BASE
- 3 - LES MODALITES D'APPLICATIONS
- 4 - INITIALISATION, ELIMINATION DES CONNAISSANCES A PRIORI
- 5 - ESTIMATION DES VARIANCES
- 6 - CONCLUSION

Nous abordons, dans ce chapitre, la mise en oeuvre pratique du filtrage non linéaire. La caractéristique essentielle de notre méthode consiste en une décomposition des équations d'évolution et d'observation en une succession de transformations élémentaires permettant d'appliquer un petit nombre de modules de calcul réalisant les opérations de filtrage. D'autre part, il est nécessaire d'initialiser le calcul récurrent de l'espérance et de la covariance conditionnelle de l'état. Nous tenons compte d'une correction permettant d'éliminer l'influence des initialisations et nous proposons un algorithme simplifié permettant d'estimer la variance des perturbations.

1) PRINCIPE DE DECOMPOSITION EN OPERATIONS ELEMENTAIRES

Considérons les systèmes décrits par les équations d'évolution et d'observation discrètes suivantes :

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{f}_t(\underline{x}_t, \underline{w}_t) \quad (\text{IV-1})$$

$$\underline{s}_t = \underline{g}_t(\underline{x}_t, \underline{v}_t) \quad (\text{IV-2})$$

Modèle markovien déjà choisi au chapitre II, mais où $\underline{f}_t$ et $\underline{g}_t$ sont ici des fonctions polynômiales (issues éventuellement d'un développement limité des non linéarités).

Nous choisissons, maintenant, la lettre t comme indice temporel discret pour des raisons qui vont apparaître clairement dans la suite du chapitre.

Nous rappelons que $\underline{w}_t$ et $\underline{v}_t$ sont des séquences aléatoires indépendantes centrées de covariance :

$$E[\underline{w}_t \underline{w}_t^T] = W_t$$

$$E[\underline{v}_t \underline{v}_t^T] = V_t$$

La méthode que nous allons utiliser consiste en une décomposition des équations (IV-1) et (IV-2) en une succession de transformations élémentaires permettant d'appliquer un petit nombre de modules de calcul réalisant les opérations de filtrage.

Nous avons choisi tout d'abord de décomposer l'équation d'évolution en une suite de transformations qui concernent à chaque fois une seule composante du vecteur d'état. D'autre part, les opérations correspondantes ne sont que des sommes ou des produits de deux composantes, soit de l'état, soit des bruits.

Enfin, l'équation d'observation est choisie linéaire (on peut toujours se ramener à ce cas : chapitre II, paragraphe 5) et V_t est une matrice diagonale (les composantes v_t^i de $\underline{v}_t$ sont indépendantes).

Nous allons détailler sur un exemple simple la suite des transformations répondant aux trois impératifs que nous venons de choisir.

Exemple :

Considérons le processus stochastique suivant :

$$x_{t+1} = a x_t + b x_t^3 + u_t + w_t \quad (\text{IV-3})$$

$$s_t = d x_t^2 + v_t \quad (\text{IV-4})$$

où u_t et s_t sont les séquences d'entrée et de sortie a , b , et d des coefficients déterministes et où l'état x_t est à une seule composante.

w_t et v_t sont des séquences indépendantes de variances W_t et V_t .

Les équations d'évolution et de mesure sont polynômiales, mais, d'une part, il existe un terme en x_t^3 dans l'équation (IV-3) et, d'autre part, l'équation d'observation est non linéaire.

Nous allons donc introduire un vecteur aléatoire $\underline{z}$ de dimension 2 pour lequel nous allons adopter le cycle des transformations successives suivantes :

Admettons qu'en début de cycle, $\underline{z}$ soit initialisé par :

$$\underline{z}_0 = \begin{bmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t/t} \\ x_{t/t}^2 \end{bmatrix}$$

où $x_{t/t}$ désigne les statistiques de la variable aléatoire x_t conditionnelle aux mesures $s_1, s_2, \dots, s_t$ et qui peut être représentée dans le cas gaussien par sa moyenne $\hat{x}_{t/t} = E|x_t/s_1, s_2, \dots, s_t|$ et sa variance :

$$E[(x_t - \hat{x}_{t/t})(x_t - \hat{x}_{t/t})/s_1, s_2, \dots, s_t]$$

On désire connaître, en fin de cycle, la variable aléatoire $x_{t+1/t+1}$.

Considérons alors les transformations successives suivantes :

$$\text{1ère transformation} \quad \begin{cases} z_1^1 = (a z_0^1 + b z_0^1 z_0^2) \\ z_1^2 = z_0^2 \text{ (2ème composante inchangée)} \end{cases}$$

$$\text{2ème transformation} \quad \begin{cases} z_2^1 = z_1^1 + u_t + w_t \\ z_2^2 = z_1^2 \text{ (2ème composante inchangée)} \end{cases}$$

$$\text{3ème transformation} \quad \begin{cases} z_3^1 = z_2^1 \text{ (1ère composante inchangée)} \\ z_3^2 = z_2^1 z_2^2 \end{cases}$$

à la suite de cette troisième opération, nous disposons de la "prédiction" :

$$\begin{cases} z_3^1 = x_{t+1/t} \\ z_3^2 = x_{t+1/t}^2 \end{cases}$$

4ème transformation : Si nous utilisons, maintenant, l'équation d'observation $s_{t+1} = 0 z_3^1 + d z_3^2 + v_{t+1}$ et la mesure s_{t+1} , nous obtenons :

$$\begin{cases} z_4^1 = x_{t+1/t+1} \\ z_4^2 = x_{t+1/t+1}^2 \end{cases}$$

A la suite de cette quatrième transformation, nous obtenons le résultat souhaité et il suffit alors de choisir comme estimation de l'état :

$$\hat{x}_{t+1/t+1} = E[z_4^1]$$

Le cycle des transformations répond bien aux trois conditions que nous rappelons :

- 1 - Modification pour chaque transformation élémentaire d'une seule composante du vecteur d'état.
- 2 - Les opérations élémentaires ne sont que des sommes ou des produits de deux composantes de l'état ou du bruit.
- 3 - L'équation d'observation est linéaire.

Quelles que soient les fonctions polynômiales f_t et g_t , on pourra toujours déterminer un nouveau vecteur d'état $\underline{z}$ et un cycle de transformations satisfaisant à ces trois conditions (voir paragraphe 4).

2) LES TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DE BASE

Nous pourrions traiter tous les problèmes où les non-linéarités sont polynômiales à partir des 5 opérations élémentaires suivantes :

1ère transformation : C'est l'opération linéaire de base

$$z_{k+1}^i = a^i z_k^i + a^j z_k^j \quad (\text{IV-5})$$

l'indice k n'est plus ici un indice temporel mais simplement le numéro de la transformation élémentaire dans le cycle qui permet de passer de l'instant t à l'instant t+1. Nous avons vu, dans l'exemple du paragraphe 1, que l'on pourrait envisager 4 transformations pour passer de $x_{t/t}$ à $x_{t+1/t+1}$.

2ème transformation : Opération non linéaire de base sur les composantes de l'état :

$$z_{k+1}^i = a^i z_k^i + a^{j\ell} z_k^j z_k^\ell \quad (\text{IV-6})$$

3ème transformation : Addition d'un terme aléatoire indépendant

$$z_{k+1}^i = z_k^i + w_t^i \quad (\text{IV-7})$$

4ème transformation : Opération non linéaire entre l'état et les bruits

$$z_{k+1}^i = z_k^i + z_k^j \omega_t^l \quad (\text{IV-8})$$

Ces quatre premières transformations permettent le passage de $\underline{x}_{t/t}$ à $\underline{x}_{t+1/t}$. La 5ème détermine la variable aléatoire conditionnelle $\underline{x}_{t+1/t+1}$.

5ème transformation : Calcul de l'estimation conditionnelle à la mesure $\underline{s}_{t+1}$. Soit l'équation d'observation linéaire suivante :

$$\underline{s}_{t+1} = C \underline{z}_k + \underline{v}_{t+1}$$

L'espérance et la variance de $\underline{z}$ connaissant $\underline{s}_{t+1}$ sont données par les équations d'estimation du filtre de Kalman (II-8, II-9, II-10 du chapitre II).

On peut programmer directement ces expressions dans le cas général. Cependant, dans de nombreuses applications, les composantes de $\underline{v}$ sont indépendantes, ce qui permet de considérer une succession de mesures scalaires et de calculer successivement :

$$\begin{cases} \underline{z}_{k+1} = \underline{z}_k / s_{t+1}^1 & \text{puis} \\ \underline{z}_{k+2} = \underline{z}_{k+1} / s_{t+2}^2 = \underline{z}_k / s_{t+1}^1, s_{t+1}^2 \\ \dots \\ \underline{z}_{k+r} = \underline{z}_{k+r-1} / s_{t+1}^r = \underline{z}_k / s_{t+1}^1, s_{t+1}^2, \dots, s_{t+1}^r = \underline{z}_k / \underline{s}_{t+1} \end{cases}$$

La 5ème opération élémentaire consiste alors à calculer l'estimation de $\underline{z}$ conditionnellement à la composante s_{t+1}^l de la mesure $\underline{s}_{t+1}$.

$$s_{t+1}^l = C^l \underline{z}_k + v_{t+1}^l \quad (\text{IV-9})$$

C^l étant la $l^{\text{ième}}$ ligne de la matrice d'observation C . Pour chacune de ces transformations, nous allons déterminer les modules de calcul qui nous permettent d'obtenir les paramètres statistiques de $\underline{z}_{k+1}$ (espérance et covariance) à partir des paramètres de $\underline{z}_k$.

On note :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{z}}_k &= E[\underline{z}_k] \\ M_k &= E[(\underline{z}_k - \hat{\underline{z}}_k)(\underline{z}_k - \hat{\underline{z}}_k)^T] \end{aligned}$$

2-1) Transformation linéaire de base

$$z_{k+1}^i = a^i z_k^i + a^j z_k^j \quad (\text{les autres composantes inchangées})$$

cette opération étant linéaire, on sait que :

$$\begin{aligned}\hat{z}_{k+1} &= A \hat{z}_k \\ M_{k+1} &= A M_k A\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}A^{ii} &= a^i \\ A^{ij} &= a^j\end{aligned}$$

les autres composantes de A étant nulles.

On peut alors programmer le sous-programme CADDE suivant dont les arguments d'entrée seront les données :

$$\begin{aligned}Z &= \hat{z}_k \quad (\text{tableau de dimension } N) \\ C &= M_k \quad (\text{tableau de dimension } N \times N) \\ I &= i \quad (\text{entier}) \\ J &= j \quad (\text{entier}) \\ AI &= a^i \quad (\text{réel}) \\ AJ &= a^j \quad (\text{réel}) \\ N &= \text{dimension maximale de } Z \\ M &= \text{dimension effective de } Z\end{aligned}$$

les arguments de sortie seront les grandeurs calculées :

$$\begin{aligned}Z &= \hat{z}_{k+1} \\ C &= M_{k+1}\end{aligned}$$

d'où le sous-programme :

SUBROUTINE CADDE (C,Z,M,N,AI,I,AJ,J)

(l'ordinogramme et le listing sont donnés en annexe)

2-2) Transformation non linéaire de base

$$z_{k+1}^i = a^i z_k^i + a^{j\ell} z_k^j z_k^\ell \quad (\text{les autres composantes inchangées})$$

l'expression ci-dessus n'étant pas linéaire, nous utilisons ici les formules d'approximations établies au chapitre II. On réalise alors le programme correspondant dénommé CPROD (détails des calculs en annexe).

Les arguments d'entrée seront alors :

$$Z = \hat{z}_k$$

$$C = M_k$$

$$I = i$$

$$J = j$$

$$AI = a^i$$

$$AJL = a^{j\ell}$$

$$N = \text{dimension maximale de } Z$$

$$M = \text{dimension effective de } Z$$

Les arguments de sortie sont analogues à ceux de CADDE. D'où le sous-programme :

SUBROUTINE CPROD (C,Z,M,N,AI,I,AJL,J,L)

(l'ordinogramme et le listing sont donnés en annexe)

2-3) Addition d'un terme aléatoire indépendant

$$z_{k+1}^i = z_k^i + w^i \text{ (les autres composantes inchangées)}$$

où w^i est un terme aléatoire, centré, indépendant, de variance W^{ii} . On obtient évidemment dans ce cas là :

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k$$

$$M_{k+1}^{ii} = M_k^{ii} + W^{ii}$$

les autres éléments de M_k étant inchangés.

Ici, la transformation s'opère sur une seule composante, mais le résultat est bien sûr généralisable au cas vectoriel.

$$z_{k+1} = z_k + \underline{w}$$

où $\underline{w}$ est un vecteur aléatoire, centré, indépendant, de covariance W .

Alors :

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k$$

$$M_{k+1} = M_k + W$$

Il n'est pas nécessaire ici de créer un sous-programme pour réaliser cette opération, étant donnée sa simplicité.

2-4) Transformation non linéaire sur les bruits

$$z_{k+1}^i = z_k^i + z_k^j w^\ell \quad (\text{les autres composantes inchangées})$$

où w^ℓ est un terme aléatoire, indépendant, centré, de variance $W^{\ell\ell}$.

Nous sommes en présence ici d'une non-linéarité sur l'état et sur les bruits. Nous utilisons donc les formules d'approximations établies au chapitre II. On obtient, finalement (détail des calculs en annexe) :

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1} &= \hat{z}_k \\ M_{k+1}^{ii} &= M_k^{ii} + W^{\ell\ell} (M_k^{jj} + (\hat{z}_k^j)^2) \end{aligned}$$

les autres éléments de la matrice de covariance étant inchangés. Ici encore, un sous-programme est inutile pour réaliser cette opération, étant donnée sa simplicité.

2-5) L'estimation conditionnelle

Considérons l'équation de mesure linéaire :

$$s^\ell = C^\ell z_k + v^\ell$$

où s^ℓ est la composante n° ℓ de la mesure $\underline{s}$, C^ℓ la ligne n° ℓ de la matrice d'observation et v^ℓ une séquence aléatoire, indépendante, centrée, de variance $V^{\ell\ell}$.

L'espérance et la variance conditionnelle de z_{k+1} , connaissant la valeur s^ℓ prise par la composante n° ℓ de la sortie, sont données en fonction des anciennes valeurs $\hat{z}_k$ et M_k par les expressions suivantes :

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k + M_k (C^\ell)^T [C^\ell M_k (C^\ell)^T + V^{\ell\ell}]^{-1} [s^\ell - C^\ell \hat{z}_k]$$

$$M_{k+1} = M_k - M_k (C^\ell)^T [C^\ell M_k (C^\ell)^T + V^{\ell\ell}]^{-1} C^\ell M_k$$

le sous-programme CESTA correspondant possèdera donc comme arguments d'entrée :

$$Z = \hat{z}_k$$

$$C = M_k$$

$$S = s^\ell \quad (\text{la valeur prise par la composante n°}\ell \text{ de la sortie})$$

$$CL = C^\ell \quad (\text{ligne } \ell \text{ de la matrice d'observation})$$

$$V = V^{\ell\ell} \quad (\text{variance de } v^\ell)$$

$$N = \text{dimension maximale de } Z$$

$$M = \text{dimension effective de } Z$$

Les arguments de sortie seront :

$Z = \hat{z}_{k+1}$ (espérance conditionnelle de l'état)

$C = M_{k+1}$ (variance conditionnelle de l'état)

EC = Espérance conditionnelle de v^l

VC = Variance conditionnelle de v^l

Ces deux derniers arguments ayant leur utilité lorsqu'on cherche à identifier parallèlement la variance V^{ll} (voir paragraphe 5). Le sous-programme correspondant à l'estimation conditionnelle s'écrira donc :

SUBROUTINE CESTA (C,Z,M,N,S,CL,V,EC,VC)

(calculs, ordinogramme et listing en annexe)

Cependant, dans de nombreuses applications, chaque composante s^l est souvent fonction au plus de deux composantes de z_k . Dans ce cas, pour éviter des opérations inutiles, on utilisera la transformation élémentaire qui calcule l'estimation de l'état conditionnellement à la composante s^l de $\underline{s}$ pour :

$$s^l = c^i z_k^i + c^j z_k^j + v^l$$

Les équations permettant d'obtenir $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1} , établies plus haut dans le cas général, restent bien sûr valables mais le nouveau programme CESTE est plus simple et nécessite un temps d'exécution beaucoup plus court. Les arguments d'entrée et de sortie restent analogues à ceux de CESTA à l'exception de ceux définissant l'équation de mesure : CL étant remplacé par CI,I,CJ,J (c^i, i, c^j, j).

Le sous-programme CESTE s'écrira :

SUBROUTINE CESTE (C,Z,M,N,S,CI,I,CJ,J,V,EC,VC)

(ordinogramme et listing en annexe)

3) LES MODALITES D'APPLICATIONS

Nous venons de décrire, ici, 5 transformations de base qui conduisent, soit à des expressions simples qui ne nécessitent pas l'écriture d'un sous-programme (addition d'un terme sur un élément de la matrice de covariance par exemple), soit à des sous-programmes ne comportant qu'un nombre restreint d'instructions et donc demandant un temps d'exécution relativement court.

On remarquera que, lors du traitement des équations par les transformations successives, on effectue uniquement les calculs strictement nécessaires.

On évite ainsi les pertes de temps en opérations inutiles que comporterait un programme trop général (multiplications par zéro ou un, additions de termes nuls).

A titre d'illustration, nous pouvons détailler les appels successifs des sous-programmes qui permettent de traiter l'exemple choisi en début de chapitre.

$$x_{t+1} = a x_t + b x_t^3 + u_t + w_t$$

$$s_t = d x_t^2 + v_t$$

Considérons le vecteur $\underline{z}$ initialisé en début de cycle par :

$$\underline{z}_0 = \begin{bmatrix} x_{t/t} \\ x_{t/t}^2 \end{bmatrix} \text{ et adoptons les notations FORTRAN suivantes :}$$

$$Z(I) = \hat{z}_k^i$$

$$C(I,J) = M_k^{ij}$$

A, B, D, U, S représentent les grandeurs a, b, d, u_t et s_{t+1} . V et W sont les variances de v_{t+1} et w_t .

1ère transformation

$$z_1^1 = a z_0^1 + b z_0^1 z_0^2$$

$$z_1^2 = z_0^2 \text{ (2ème composante inchangée)}$$

CALL CPROD (C,Z,2,2,A,1,B,1,2)

2ème transformation

$$z_2^1 = z_1^1 + u_t + w_t$$

$$z_2^2 = z_1^2 \text{ (2ème composante inchangée)}$$

Z(1) = Z(1) + U

C(1,1) = C(1,1) + W

3ème transformation

$$z_3^1 = z_2^1 \text{ (1ère composante inchangée)}$$

$$z_3^2 = 0 \cdot z_2^2 + z_2^1 z_2^1$$

CALL CPROD (C,Z,2,2,0.,2,1.,1,1)

4ème transformation

Estimation conditionnelle à la mesure s_{t+1}

$$s_{t+1} = 0 \cdot z_3^1 + d \cdot z_3^2 + v_{t+1}$$

On obtient :

$$z_4^1 = x_{t+1/t+1}$$

$$z_4^2 = x_{t+1/t+1}^2$$

CALL CESTE (C,Z,2,2,S,O.,1,D,2,V,EC,VC)

Toute analyse préalable pour un problème donné consistera donc à décomposer les équations :

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{f}_t(\underline{x}_t, \underline{w}_t)$$

$$\underline{s}_t = \underline{g}_t(\underline{x}_t, \underline{v}_t)$$

en un cycle de transformations élémentaires de sorte que l'essentiel du programme de filtrage soit constitué d'appels aux sous-programmes décrits plus haut.

Dans le cas où $\underline{f}_t$ et $\underline{g}_t$ sont des fonctions polynômiales, on pourra toujours trouver un vecteur $\underline{z}$ et un cycle de transformations. Pour un problème donné, on peut définir différents vecteurs $\underline{z}$ et envisager différentes séquences d'appel aux sous-programmes de base. On cherchera évidemment à avoir une dimension de $\underline{z}$ et un nombre d'appels les plus faibles possible, afin de réduire le coût de calcul. Bien qu'aucune étude de traitement systématique n'ait été entreprise, un minimum d'expérience permet de parvenir à ce résultat (voir exemples d'applications chapitres V et VI). D'autre part, pour un système d'équations donné, des séquences distinctes conduisent à des filtres approchés différents et il est difficile de déterminer le meilleur (au sens de l'optimalité). Nous n'avons pas entrepris ici d'étude particulière sur ce point précis.

Dans le cas où $\underline{f}_t$ et $\underline{g}_t$ ne sont pas des fonctions polynômiales, il faudra au préalable en trouver un développement polynômial. Ce développement se fera au moins à l'ordre deux, sinon le filtre se réduit à un simple filtre de Kalman linéarisé (rien ne s'oppose évidemment à utiliser dans ce cas notre méthode).

Notons que lors de l'identification des systèmes linéaires où les paramètres à estimer sont ajoutés à l'état proprement dit pour former "l'état généralisé", les seules non-linéarités sont constituées par des produits de deux variables (un paramètre et une composante de l'état), et les fonctions $\underline{f}_t$ et $\underline{g}_t$ sont donc polynômiales d'ordre deux.

4) INITIALISATION, ELIMINATION DES CONNAISSANCES A PRIORI

Le fonctionnement du filtre non linéaire nécessite la connaissance des valeurs initiales :

$$\hat{x}_{0/o} = E|x_0|$$

$$M_{0/o} = E|(x_0 - \hat{x}_{0/o})(x_0 - \hat{x}_{0/o})^T|$$

En l'absence de mesure antérieure à l'instant zéro, $\hat{x}_{0/o}$ et $M_{0/o}$ seront considérés comme information à priori sur l'état généralisé. La covariance initiale de x_0 , $M_{0/o}$, est nécessairement assez grande, sauf connaissance a priori assez précise. Cependant, on ne doit pas prendre les variances des estimations initiales trop grandes, sous prétexte de majorer l'incertitude initiale, car le filtre devient alors fortement sous optimal et risque même de diverger. Inversement, on ne doit pas minorer exagérément ces variances initiales, sous peine de retrouver dans les estimations successives l'influence d'une initialisation qui pourrait être erronée. L'expérience montre cependant que, dans la plupart des cas, la marge de manoeuvre est très large entre ces deux extrêmes.

Dans le cas gaussien, on peut relier immédiatement les valeurs initiales à un intervalle de confiance.

Soit, par exemple, $[x_m^i, x_M^i]$ l'intervalle de confiance à 95,5 % sur x^i . Si l'on considère que les composantes sont indépendantes (à l'instant zéro), on écrira :

$$x_{0/o}^i = \frac{x_m^i + x_M^i}{2} \quad (IV-10)$$

$$M_{0/o}^{ii} = \left(\frac{x_M^i - x_m^i}{2}\right)^2 \quad (IV-11)$$

$$M_{0/o}^{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (IV-12)$$

Nous proposons, maintenant, un procédé pour éliminer de l'estimation finale l'influence de l'initialisation ; élimination qui serait rigoureuse dans le cas d'une estimation optimale linéaire comme nous allons le montrer. On suppose ici que certaines composantes du vecteur x_t sont stationnaires (c'est le cas des paramètres lors d'une identification) et l'on pose :

$$\underline{x}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \vdots \\ z_t \end{bmatrix} \quad \text{où } y_t \text{ contient les termes non stationnaires} \\ \text{et } z_t \text{ les termes stationnaires}$$

Nous allons montrer que l'on peut éliminer l'influence de l'initialisation $\hat{z}_{0/o}$, $M_{z_{0/o}}$ (correspondant aux termes stationnaires)

avec $\hat{\underline{x}}_{0/o} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{0/o} \\ \hat{\underline{z}}_{0/o} \end{bmatrix}$ $M_{0/o} = \begin{bmatrix} M_{y_{0/o}} & | & 0 \\ \hline 0 & | & M_{z_{0/o}} \end{bmatrix}$

Pour cela, considérons que l'initialisation $\hat{\underline{z}}_{0/o}$, $M_{z_{0/o}}$ correspond à une mesure fictive :

$$\underline{s}_0 = C \underline{x}_0 + \underline{v}_0 \quad (IV-13)$$

où :

$$\underline{s}_0 = \hat{\underline{z}}_{0/o}$$

$$V_0 = E[\underline{v}_0 \underline{v}_0^T] = M_{z_{0/o}}$$

$$\text{et } C = [0 \quad | \quad 1]$$

l'estimation finale est l'approximation :

$$\hat{\underline{x}}_{n/n} \approx E[\underline{x}_n / \hat{\underline{z}}_{0/o}, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n] \quad \text{soit}$$

$$\hat{\underline{x}}_{n/n} \approx E[\underline{x}_n / \underline{s}_0, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n]$$

Or, on désirerait connaître :

$$\hat{\underline{x}}'_{n/n} = E[\underline{x}_n / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n]$$

c'est-à-dire l'estimation conditionnelle uniquement aux mesures réelles. Dans le cas d'une estimation linéaire par rapport aux mesures, l'ordre des observations n'intervient pas dans le résultat final et :

$$\hat{\underline{x}}_{n/n} = E[\underline{x}_n / \underline{s}_0, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n] = E[\underline{x}_n / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n, \underline{s}_0]$$

On peut alors écrire :

$$\hat{\underline{x}}_{n/n} = \hat{\underline{x}}'_{n/n} + M'_{n/n} C^T (CM'_{n/n} C^T + M_{z_{0/o}})^{-1} (\underline{s}_0 - C\hat{\underline{x}}'_{n/n}) \quad (IV-14)$$

$$M_{n/n} = M'_{n/n} - M'_{n/n} C^T (CM'_{n/n} C^T + M_{z_{0/o}})^{-1} CM'_{n/n} \quad (IV-15)$$

On peut résoudre ces équations par rapport aux grandeurs inconnues et exprimer $\hat{\underline{x}}'_{n/n}$ et $M'_{n/n}$ en fonction des grandeurs connues $\hat{\underline{x}}_{n/n}$ et $M_{n/n}$.

Le résultat est le suivant :

$$\hat{\underline{x}}'_{n/n} = \hat{\underline{x}}_{n/n} + M_{n/n} C^T (CM_{n/n} C^T - M_{z_{0/o}})^{-1} (\underline{s}_0 - C\hat{\underline{x}}_{n/n}) \quad (IV-16)$$

$$M'_{n/n} = M_{n/n} - M_{n/n} C^T (CM_{n/n} C^T - M_{z_{0/o}})^{-1} CM_{n/n} \quad (IV-17)$$

Démonstration :

Celle-ci utilise le théorème bien connu suivant :

Si A, C et (A+BCD) sont des matrices carrées non singulières, alors :

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B (C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1} DA^{-1} \quad (IV-18)$$

D'après (IV-18), l'équation (IV-15) s'écrit alors :

$$M_{n/n} = (M'_{n/n}{}^{-1} + C^T M^{-1} z_{o/o} C)^{-1} \text{ on en déduit alors}$$

$$M'_{n/n} = (M_{n/n} - C^T M^{-1} z_{o/o} C)^{-1} \text{ et d'après (IV-18)}$$

$$M'_{n/n} = M_{n/n} - M_{n/n} C^T (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} C M_{n/n}$$

qui est le résultat (IV-17). D'autre part, l'équation (IV-14) peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{x}_{n/n} = \hat{x}'_{n/n} + M'_{n/n} C^T (1 + M^{-1} z_{o/o} C M'_{n/n} C^T)^{-1} M^{-1} z_{o/o} (\underline{s}_o - C \hat{x}'_{n/n})$$

Utilisons ici encore la relation (IV-18) :

$$\hat{x}_{n/n} = \hat{x}'_{n/n} + M'_{n/n} C^T (1 - (C M'_{n/n} C^T + M z_{o/o})^{-1} C M'_{n/n} C^T) M^{-1} z_{o/o} (\underline{s}_o - C \hat{x}'_{n/n})$$

$$\hat{x}_{n/n} = \hat{x}'_{n/n} + (M'_{n/n} - M'_{n/n} C^T (C M'_{n/n} C^T + M z_{o/o})^{-1} C M'_{n/n}) C^T M^{-1} z_{o/o} (\underline{s}_o - C \hat{x}'_{n/n})$$

Si on utilise alors (IV-15), on obtient :

$$\hat{x}_{n/n} = \hat{x}'_{n/n} + M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} (\underline{s}_o - C \hat{x}'_{n/n})$$

$$\hat{x}_{n/n} = (1 - M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} C) \hat{x}'_{n/n} + M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} \underline{s}_o \text{ d'où}$$

$$\hat{x}'_{n/n} = (1 - M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} C)^{-1} \hat{x}_{n/n} - (1 - M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} C)^{-1} M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} \underline{s}_o$$

(IV-18) donne alors :

$$\hat{x}'_{n/n} = (1 - M_{n/n} C^T (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} C) \hat{x}_{n/n} - (1 - M_{n/n} C^T (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} C) M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o} \underline{s}_o$$

$$= \hat{x}_{n/n} - M_{n/n} C^T (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} C \hat{x}_{n/n}$$

$$- M_{n/n} C^T (M^{-1} z_{o/o} - (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} C M_{n/n} C^T M^{-1} z_{o/o}) \underline{s}_o$$

Appliquons une dernière fois (IV-18) :

$$\hat{x}'_{n/n} = \hat{x}_{n/n} - M_{n/n} C^T (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} C \hat{x}_{n/n} - M_{n/n} C^T (M z_{o/o} - C M_{n/n} C^T)^{-1} \underline{s}_o$$

$$\hat{x}'_{n/n} = \hat{x}_{n/n} + M_{n/n} C^T (C M_{n/n} C^T - M z_{o/o})^{-1} (\underline{s}_o - C \hat{x}_{n/n}) \text{ qui est le résultat (IV-16)}$$

Donc, d'après les équations (IV-16) et (IV-17), tout se passe comme s'il suffisait de considérer la mesure fictive $\underline{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_{0/0}$ affectée d'une erreur de mesure de variance $(-M_{z_{0/0}})$ pour retrouver l'estimation non conditionnelle à $\underline{s}_0$. De plus, la matrice $M_{z_{0/0}}$ est très souvent diagonale. La mesure fictive initiale peut alors être considérée comme une succession de mesures scalaires indépendantes et l'élimination peut alors se faire en appliquant un certain nombre de fois la 5ème transformation élémentaire, concernant le calcul de l'estimation conditionnelle à une mesure scalaire.

Notons, toutefois, que cette élimination n'est sensible que si la covariance finale n'est pas trop inférieure à la covariance initiale.

5) ESTIMATION DES VARIANCES

Jusqu'ici, nous avons considéré comme des données du problème, les variances W_t et V_t des séquences indépendantes $\underline{w}_t$ et $\underline{v}_t$ intervenant dans les équations d'évolution et d'observation du processus. Il est clair, cependant, que plus les valeurs données aux variances seront réalistes, plus le comportement de l'algorithme risquera d'être satisfaisant, et plus les approximations $M_{t/t}$ calculées pour les variances des estimations de l'état auront une bonne signification. D'où l'utilité d'une méthode permettant d'estimer W_t et V_t lorsqu'elles ne sont pas connues exactement.

Pour y parvenir, on peut inclure dans l'état généralisé les paramètres statistiques à estimer afin de leur appliquer le même processus d'identification par filtrage non linéaire. Il apparaît qu'une telle mise en équation conduit à un filtre inefficace [1].

En prenant en considération les moments du 3ème ordre (BRAMMER [3]), ou en introduisant dans les équations d'état w_t^2 et non w_t (De LARMINAT [1]) par exemple, on peut déterminer les équations d'un filtre secondaire permettant d'estimer les variances.

Cependant, la mise en oeuvre de tels filtres nécessite un volume de calcul important et ne pourrait être envisagée lors de l'application à une identification par exemple.

Il est alors nécessaire de faire intervenir d'importantes simplifications.

C'est ainsi que nous adopterons l'algorithme simplifié suivant (De LARMINAT [1] pp. 73, 74) pour les systèmes représentés par :

$$\begin{aligned} \underline{x}_{t+1} &= \underline{f}_t(\underline{x}_t) + \underline{w}_t \\ \underline{s}_t &= \underline{C}_t \underline{x}_t \end{aligned}$$

les équations approchées d'estimation de la variance de $\underline{w}_t$ sont :

$$W_{t+1/t+1}^{ij} = W_{t/t}^{ij} + \frac{k_t^{ij}}{2} (\hat{w}_{t/t+1}^i \hat{w}_{t/t+1}^j + W_{t/t+1}^{ij} - W_{t/t}^{ij}) \quad (IV-19)$$

où $W_{t/t}$ est la matrice de covariance estimée

$$\hat{\underline{w}}_{t/t+1} = E[\underline{w}_t / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_{t+1}]$$

$$W_{t/t+1} = E[(\underline{w}_t - \hat{\underline{w}}_{t/t+1})(\underline{w}_t - \hat{\underline{w}}_{t/t+1}) / \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_{t+1}]$$

et
$$k_{t+1}^{ij} = k_t^{ij} - \frac{(k_t^{ij})^2}{2} \quad (IV-20)$$

On peut alors schématiser le processus de filtrage complet par la figure suivante :

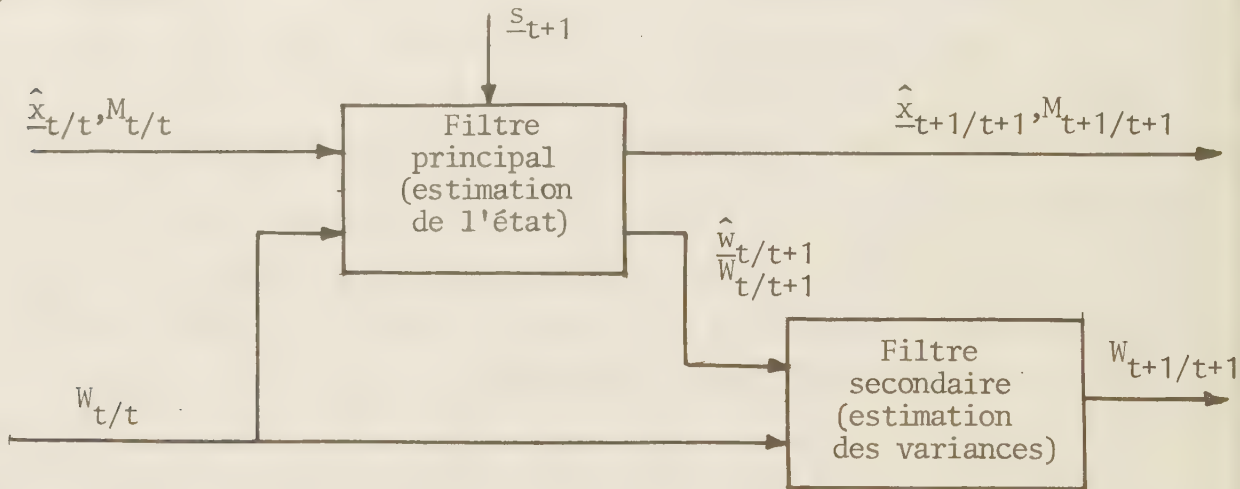


Fig. IV-1

On notera que pour l'identification des systèmes représentés par :

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{f}_t(\underline{x}_t) + \underline{w}_t$$

$$\underline{s}_t = \underline{C}_t \underline{x}_t + \underline{v}_t$$

où W_t est parfaitement connue, le même procédé peut être appliqué pour estimer la variance de $\underline{v}_t$. Si, de plus, on utilise la 5ème transformation élémentaire, les sous-programmes CESTA ou CESTE fournissent l'estimation et la variance conditionnelle de $\underline{v}_t$. La programmation du filtre secondaire ne demande alors que quelques instructions et le temps de calcul est alors très raisonnable.

6) CONCLUSION

Nous avons proposé, dans ce chapitre, un ensemble de sous-programmes de base ou d'algorithmes très simples qui permettent de programmer les opérations de filtrage non linéaire correspondant à un système d'équations données, sans entrer dans le détail des équations de filtrage. Rappelons que les non-linéarités doivent au préalable être remplacées par un développement polynômial (si elles ne sont pas déjà polynômiales) et que les transformations successives que nous envisageons ne concernent à chaque étape qu'une seule composante de l'état, et ne peuvent être que des sommes et des produits de deux composantes de l'état ou du bruit. Enfin, l'équation d'observation doit être linéaire et les composantes des perturbations sur les différentes sorties doivent être indépendantes. Néanmoins, le choix judicieux d'un vecteur d'état augmenté permet de traiter le cas général où l'équation d'observation est non linéaire et où les développements polynômiaux sont d'ordre supérieur à deux. D'autre part, pour mettre en oeuvre un filtre non linéaire approché, il est nécessaire d'initialiser le calcul récurrent de $\underline{x}_t$ et M_t par des valeurs $\hat{\underline{x}}_{0/0}$ et $M_{0/0}$. Ces dernières sont déterminées à partir des connaissances a priori dont on dispose et de la confiance qu'on peut leur accorder. Nous proposons, de plus, un procédé pour éliminer de l'estimation finale l'influence de l'initialisation. Signalons enfin que, lorsque les perturbations ont des caractéristiques inconnues, un algorithme simplifié peut être utilisé pour identifier leurs variances.

BIBLIOGRAPHIE IV

- | 1 | De LARMINAT Ph.
"Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Thèse de Docteur-ès-Sciences, Nantes (1971).

- | 2 | PIASCO J.M.
"Applications de l'identification par filtrage non linéaire sous-optimal"
D.E.A. d'Automatique, Nantes (1971).

- | 3 | BRAMMER K.G.
"Input adaptative Kalman-Bucy filtering"
I.E.E.E. Transaction on Automatic Control, vol. AC 15, (1970).

- | 4 | BEYSENS A.
"Identification d'un turboréacteur par filtrage non linéaire sous-optimal"
D.E.A. d'Automatique, Nantes (1971).

- | 5 | De LARMINAT Ph. et TALLEC M.H.
"On line identification of time varying systems"
IFAC Symposium, Prague (1970).

Chapitre V

APPLICATIONS A L'IDENTIFICATION DE PROCEDES REELS

- 1 - APPLICATION DU FILTRAGE CONTINU-DISCRET
- 2 - IDENTIFICATION D'UNE UNITE PILOTE GENERATEUR DE VAPEUR
- 3 - IDENTIFICATION D'UN SYSTEME MULTI-ENTREES MONO-SORTIE

Nous appliquons, ici, la méthode de décomposition des équations en une séquence de transformations élémentaires, décrite au chapitre précédent à l'identification de trois processus réels. Le lecteur intéressé seulement par les possibilités de l'identification par filtrage non linéaire pourra se contenter d'un examen rapide, sans entrer dans tous les détails exposés. Chacun des trois exemples est cependant suivi d'une conclusion (paragraphe : 1-4, 2-5 et 3-5) dans laquelle nous faisons figurer les enseignements généraux de l'exemple considéré. L'examen détaillé de ce chapitre est plutôt destiné à l'utilisateur qui voudrait appliquer lui-même cette méthode d'identification et qui trouvera ici des astuces de mise en oeuvre et l'expérience de quelques années de pratique.

Le premier exemple permet de tester la discrétisation des systèmes continus par approximation à l'ordre un, puis avec calcul d'un terme correctif permettant de tenir compte des termes d'ordre supérieur. Le deuxième exemple est axé sur le caractère temps réel de l'identification "en ligne" d'une chaudière pilote. Le troisième concerne le programme d'identification d'un système multi-entrées, mono-sortie. A partir d'un enregistrement d'une chaudière E.D.F. de Pont sur Sambre, nous effectuons une série d'essais systématiques permettant de déterminer le nombre d'itérations nécessaires sur les mêmes données, en fonction du nombre de paramètres à identifier.

Nous avons essayé pour chacun de ces exemples de descendre jusqu'à la programmation même du filtre non linéaire en réalisant les appels aux sous-programmes élémentaires.

1) APPLICATION DU FILTRAGE CONTINU-DISCRET

Nous allons détailler dans ce paragraphe l'identification des coefficients d'une fonction de transfert. Nous considérons donc les systèmes continus linéaires susceptibles d'être représentés par le modèle suivant :

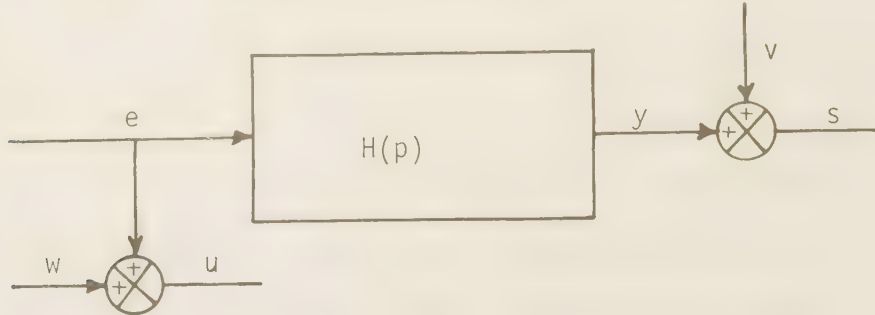


Fig. V-1

Les observations seront discrètes :

$$u(t_k) = e(t_k) + w_k$$

$$s(t_k) = y(t_k) + v_k$$

où w_k et v_k sont des séquences centrées indépendantes et de variances respectives W_k et V_k .

Les exemples que nous serons amenés à traiter étant du second ordre, nous choisirons pour $H(p)$ la forme suivante (la généralisation à un ordre n quelconque est immédiate) :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p + p^2} \quad (V-1)$$

La représentation d'état équivalente est :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

1-1) Recherche du modèle discret équivalent :

Le système d'état continu est de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \underline{x}(t) + \underline{b} e(t) \quad (V-2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \quad (V-3)$$

La méthode exposée au chapitre III consiste à remplacer l'équation continue (V-2) par une équation discrète équivalente :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_{k+1}) &= A_k^* \underline{x}(t_k) + b_k^*(e_k) \\ y(t_k) &= [0 \quad 1] \underline{x}(t_k) \end{aligned} \quad (V-4)$$

Si nous recherchons l'approximation au premier ordre avec calcul du terme correctif $\hat{c}_k$, l'équation (III-19) s'écrit ici :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T[A \underline{x}_k + b e_k] + \hat{c}_k$$

avec

$$\underline{x}_k = \underline{x}(t_k), e_k = e(t_k) \quad \text{et} \quad T = t_{k+1} - t_k.$$

Nous obtenons donc une équation de la forme (V-4), où :

$$A_k^* = \mathbb{1} + T A$$

$$b_k^* = T b e_k + \hat{c}_k$$

Le système stochastique discret équivalent sera donc le suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T[A \underline{x}_k + b e_k] + \hat{c}_k \quad (V-5)$$

$$e_{k+1} = u_{k+1} - w_{k+1} \quad (V-6)$$

$$s_k = [0 \quad 1] \underline{x}_k + v_k$$

On remarquera dans cette application que le processus de Wiener $\underline{\beta}(\tau)$ est nul, car nous avons choisi d'emblée pour les bruits des séquences discrètes (les observations étant discrètes). Le terme correctif $\hat{c}_k$ est donné par l'équation (III-20) :

$$\hat{c}_k = \frac{T}{8} [-7 \underline{k}_1 + 3 \underline{k}_2 + 3 \underline{k}_3 + \underline{k}_4]$$

avec :

$$\underline{k}_1 = A \hat{\underline{x}}_{k/k} + b e(t_k)$$

$$\underline{k}_2 = A (\hat{\underline{x}}_{k/k} + \frac{T}{3} \underline{k}_1) + b e(t_k + \frac{1}{3} T)$$

$$\underline{k}_3 = A (\hat{\underline{x}}_{k/k} - \frac{T}{3} \underline{k}_1 + T \underline{k}_2) + b e(t_k + \frac{2}{3} T)$$

$$\underline{k}_4 = A (\hat{\underline{x}}_{k/k} + T \underline{k}_1 - T \underline{k}_2 + T \underline{k}_3) + b e(t_k + T)$$

Nous choisirons pour variation de $e(t)$ entre deux instants d'observation (on ne possède que des valeurs discrètes : $e_k, e_{k+1}, \dots$) :

$$e(t) = e_k + (e_{k+1} - e_k) \frac{t - t_k}{T}; \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$$

1-2) Mise en oeuvre de l'identification

Nous pouvons, maintenant, appliquer le filtre discret-discret au système d'équations (V-5), (V-6) et (V-7).

Lorsque nous nous limiterons à l'approximation au premier ordre pour la discrétisation de l'équation continue, il nous suffira d'écrire $\hat{c}_k = 0$.

Explicitons le système d'état :

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 - T a_0 x_k^2 + T b_0 e_k + \hat{c}_k^1 \\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + T x_k^1 - T a_1 x_k^2 + T b_1 e_k + \hat{c}_k^2 \\ e_{k+1} = u_{k+1} - w_{k+1} \end{cases}$$

$$s_k = x_k^2 + v_k$$

Posons :

$$\underline{\theta}^T = [a_0 \ a_1 \ b_0 \ b_1]$$

$$\underline{z}_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ \underline{\theta} \\ e_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad w_k^7 = -w_{k+1}$$

L'équation d'état généralisée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} z_{k+1}^1 &= z_k^1 - T z_k^3 z_k^2 + T z_k^7 z_k^5 + \hat{c}_k^1 \\ z_{k+1}^2 &= z_k^2 + T z_k^1 - T z_k^4 z_k^2 + T z_k^7 z_k^6 + \hat{c}_k^2 \\ z_{k+1}^3 &= z_k^3 + w_k^3 \\ &\vdots \\ z_{k+1}^6 &= z_k^6 + w_k^6 \\ z_{k+1}^7 &= u_{k+1} + w_k^7 \end{aligned}$$

$$s_k = z_k^2 + v_k$$

Les équations 3 à 6 sont les plus simples pour pouvoir décrire l'évolution des paramètres (voir chapitre I, paragraphe 1). Dans le cas où ceux-ci sont stationnaires, on écrira :

$$w_k^i = 0 \quad i = 3, \dots, 6$$

La programmation du filtre correspondant aux équations ci-dessus s'effectue à l'aide des sous-programmes élémentaires décrits au chapitre IV.

En effet, considérons le cycle des transformations suivantes :

En début de cycle, $\underline{z}$ est initialisé par :

$$\underline{z}_0 = \underline{z}_k/k \quad (\text{statistiques conditionnelles aux mesures } s_1, s_2, \dots, s_k)$$

- Introduisons tout d'abord un état supplémentaire :

$$z_1^8 = z_0^2 \quad (\text{cette composante servant de zone de mémoire})$$

$$z_1^i = z_0^i, \quad \forall i \neq 8 \quad (\text{les autres composantes inchangées})$$

CALL CADDE (C,Z,8,8,0.,8,1.,1)

- Equation 2 :

$$z_2^2 = z_1^2 + T z_1^1$$

$$z_2^i = z_1^i \quad \forall i \neq 2$$

CALL CADDE (C,Z,8,8,1.,2,T,1)

$$z_3^2 = z_2^2 - T z_2^4 z_2^8 = (z_2^2 - T z_2^4 z_0^2)$$

$$z_3^i = z_2^i \quad \forall i \neq 2$$

CALL CPROD (C,Z,8,8,1.,2,-T,4,8)

$$z_4^2 = z_3^2 + T z_3^7 z_3^6$$

$$z_4^i = z_3^i \quad \forall i \neq 2$$

CALL CPROD (C,Z,8,8,1.,2,T,6,7)

$$z_5^2 = z_4^2 + \hat{c}_k^2 \quad (\text{un sous-programme calcule le terme correctif } \hat{c}_k^2)$$

$$z_5^i = z_4^i \quad \forall i \neq 2$$

$$Z(2) = Z(2) + CK(2)$$

- Equation 1 :

$$z_6^1 = z_5^1 - T z_5^3 z_5^8 = (z_5^1 - T z_5^3 z_0^2)$$

$$z_6^i = z_5^i \quad \forall i \neq 1$$

CALL CPROD (C,Z,8,8,1.,1,-T,3,8)

$$z_7^1 = z_6^1 + T z_6^7 z_6^5$$

$$z_7^i = z_6^i \quad \forall i \neq 1$$

CALL CPROD (C,Z,8,8,1.,1,T,5,7)

$$z_8^1 = z_7^1 + c_k^1$$

$$z_8^i = z_7^i \quad \forall i \neq 1$$

$$Z(1) = Z(1) + CK(1)$$

- Equation 3 à 6 :

$$z_9^i = z_8^i + w_k^i \quad i = 3, \dots, 6$$

$$z_9^j = z_8^j \quad \forall i \neq 3, \dots, 6$$

notons $W(I)$ les variances des w_k^i

DO 10 I = 3,6

$$10 \quad C(I,I) = C(I,I) + W(I)$$

- Equation 7 :

$$z_{10}^7 = u_{k+1}^7 + w_k^7$$

$$z_{10}^i = z_9^i \quad \forall i \neq 7$$

CALL CADDE (C,Z,8,8,0.,7,0.,1)

$$Z(7) = U$$

$$C(7,7) = W(7)$$

- Estimation conditionnelle à la mesure s_{k+1} :

l'équation de mesure est :

$$s_{k+1} = z_{k+1}^2 + v_{k+1}$$

$z_{11} = z_{k+1/k+1}$ est donc obtenu après l'appel :

CALL CESTE (C,Z,8,8,S,0.,1,1.,2,V,EC,VC)

1-3) Initialisation et élimination des connaissances à priori

Le fonctionnement du filtre non linéaire approché nécessite la connaissance des valeurs initiales :

$$\hat{z}_{0/o} = E|z_0|$$

$$M_{0/o} = E|(z_0 - \hat{z}_{0/o})(z_0 - \hat{z}_{0/o})^T|$$

Dans le cas gaussien, on peut relier immédiatement ces grandeurs à un intervalle de confiance (chapitre IV, paragraphe 4). Soit, par exemple, $[z_m^i \ z_M^i]$ l'intervalle de confiance à 95,5 % sur z^i :

$$z_{o/o}^i = \frac{z_m^i + z_M^i}{2}$$

$$M_{o/o}^{ii} = \left(\frac{z_M^i - z_m^i}{2}\right)^2$$

$$M_{o/o}^{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Sur notre exemple, et d'après la représentation choisie, nous pouvons écrire à l'instant zéro :

$$z_o^1 = x_o^1 = \frac{dy_o}{dt} + a_1 y_o - b_1 e_o$$

$$z_o^2 = x_o^2 = y_o$$

où e_o et y_o sont les entrées et sorties non bruitées à l'instant initial. Au vue des enregistrements, nous pouvons chiffrer, au moins grossièrement, une borne supérieure et une borne inférieure de e_o et y_o , ainsi que de sa dérivée $\frac{dy_o}{dt}$.

Nous pouvons donc facilement déterminer une estimation initiale et une variance initiale pour e_o , y_o et $\frac{dy_o}{dt}$.

Nous disposons donc de :

$$z_{o/o}^7 \text{ et } M_{o/o}^{77} \quad (e_o)$$

$$z_{o/o}^2 \text{ et } M_{o/o}^{22} \quad (y_o)$$

pour la composante z^1 , nous avons choisi d'effectuer les opérations suivantes :

On donne tout d'abord à $z_{o/o}^1$ la valeur $\frac{dy_o}{dt}$ déterminée ci-dessus (ainsi que $M_{o/o}^{11} = \text{variance de } \frac{dy_o}{dt}$). Mais, bien sûr, cette composante n'est pas la dérivée de la sortie car :

$$z_0^1 = \frac{dy_0}{dt} + a_1 y_0 - b_1 e_0$$

avec

$$a_1 = z^4 \quad \text{et} \quad b_1 = z^6$$

Si nous possédons des informations initiales sur les composantes 4 et 6, il nous suffira donc d'effectuer les opérations élémentaires correspondant à :

$$(z_0^1 + z_0^2 z_0^4 - z_0^6 z_0^7)$$

soit en utilisant les opérations élémentaires :

CALL CPROD (C,Z,8,8,1.,1,1.,2,4)

CALL CPROD (C,Z,8,8,1.,1,1.,6,7)

Mais, s'il est facile de donner un intervalle de confiance sur l'état proprement dit, c'est-à-dire sur les composantes z_0^1 et z_0^2 , il n'en est pas de même pour les paramètres. En l'absence de toute information, on choisira par exemple :

$$\hat{\theta}_{o/o} = 0$$

$$M_{\theta\theta o/o} = k1 \quad \text{avec } k \text{ suffisamment grand}$$

C'est cette initialisation que nous avons pris pour les paramètres (voir 1-4), ceci afin de nous placer dans le cas le plus défavorable bien qu'un simple examen des enregistrements peut nous donner au moins un ordre de grandeur des constantes de temps et du gain de la fonction de transfert à identifier.

- Elimination des connaissances a priori :

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre IV (paragraphe 4), nous considérons que l'initialisation $\hat{\theta}_{o/o}$, $M_{\theta\theta o/o}$ correspond à une mesure fictive :

$$\underline{s}_0 = C \underline{z}_0 + \underline{v}_0 \quad \text{avec} \quad \underline{z}_t = \begin{bmatrix} \underline{x}_t \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\text{où} \quad C = [0 \quad ; \quad 1]$$

$$\underline{s}_0 = \hat{\theta}_{o/o}$$

$$E[\underline{v}_0 \underline{v}_0^T] = M_{\theta\theta o/o}$$

l'estimation finale est alors l'approximation :

$$\hat{\theta}_{n/n} \approx E[\theta_{n/n} / \underline{s}_0, s_1, \dots, s_n]$$

Or, on désire connaître l'estimation conditionnelle uniquement aux mesures réelles $(s_1, s_2, \dots, s_n)$:

$$\hat{\theta}'_n = E[\theta_n / s_1, s_2, \dots, s_n]$$

Nous avons vu au chapitre IV qu'il suffisait de considérer la mesure s_0 affectée d'une erreur de mesure de variance $-M_{0/0}$ pour retrouver l'estimation non conditionnelle à s_0 .

La matrice $M_{0/0}$ étant diagonale, la mesure fictive initiale peut être considérée comme une succession de mesures scalaires indépendantes et l'élimination peut se faire en utilisant le sous-programme CESTE.

Soit $ZO(I)$ et $VO(I)$ les valeurs initiales des paramètres et de leurs variances. L'élimination se programme alors de la manière suivante :

```
DO 20 I = 3,6
```

```
20 CALL CESTE (C,Z,8,8,ZO(I),1.,I,0.1,-VO(I),EC,VC)
```

Cette correction n'a d'effet sensible que si la covariance finale n'est pas trop inférieure à la covariance initiale, c'est ce que l'on peut remarquer dans tous les essais du paragraphe (1-4).

1-4) Application à l'identification de la chaîne de tangage d'un avion

Les enregistrements sur lesquels nous avons travaillé nous ont été communiqués par le DERA-GERBIOS et ont été effectués sur un avion du type PIAGGO.

Le processus est à une entrée et deux sorties.

entrée :

d - la commande au manche

sorties :

$\dot{\theta}$ - la dérivée de l'angle d'assiette

η - le facteur de charge

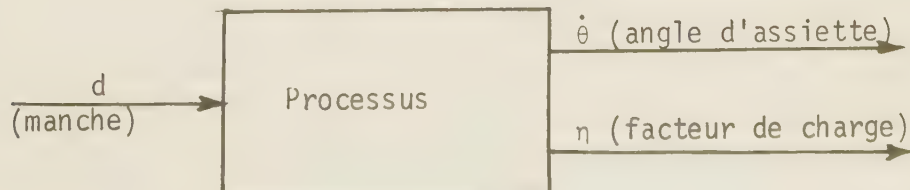


Fig. V-2

Nous choisissons, pour caractériser le modèle, deux transmittances du 2ème degré :

$$H\theta(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2}$$

$$Hn(s) = \frac{b'_0 + b'_1 s}{a'_0 + a'_1 s + s^2}$$

Nous disposons d'un enregistrement de 60 points. La période d'échantillonnage est $T = 0,1$ s (figure IV-3).

Pour tous nos essais, nous avons choisi une estimation initiale relativement large pour tous les paramètres : 0 avec un écart type de 100 (500 pour un des coefficients). Nous avons estimé graphiquement les valeurs des entrées et des sorties et de leurs dérivées en les accompagnant de variances vraisemblables.

D'autre part, nous estimons la variance V du bruit sur les sorties à l'aide de l'algorithme simplifié décrit en (IV-5). Nous initialisons cette variance avec les valeurs suivantes :

$$V = (0,005)^2 \text{ pour la sortie } \dot{\theta}$$

$$V' = (0,002)^2 \text{ pour la sortie } n$$

Pour affiner le résultat après élimination des connaissances a priori sur les estimations finales, nous reprenons celles-ci comme initialisation pour un deuxième, puis troisième passage des mêmes données.

Pour chacune des deux transmittances identifiées, nous donnons les résultats obtenus avec une simple discrétisation au 1er ordre, puis avec calcul d'un terme correctif $\hat{c}_k$ (voir 1-1).

Nous pouvons faire quelques commentaires sur ces résultats :

L'élimination des connaissances a priori n'a d'effet sensible qu'au 2ème et 3ème passage, car la valeur des variances finales n'est pas très éloignée de celle des variances initiales.

On constate, d'autre part, que l'adjonction du terme correctif $\hat{c}_k$ modifie sensiblement la valeur finale des paramètres. Toutefois, nous avons simulé pour chaque série d'essai les modèles identifiés (en se limitant à une discrétisation au 1er ordre pour les essais 1 et 3 et en employant la méthode d'intégration numérique de RUNGE-KUTTA pour les essais 2 et 4) et nous remarquons que dans tous les cas les sorties modèles suivent fidèlement les sorties réelles du processus (figures : IV-4 et IV-5).

1-5) Conclusion

Grâce aux tableaux de résultats et aux figures des pages suivantes, ce premier exemple d'application nous permet donc de comparer les résultats obtenus par la discrétisation de l'équation d'évolution continue à l'ordre un, puis avec calcul d'un terme correctif permettant de tenir compte des termes d'ordre supérieur dans le développement polynômial en T. Les deux algorithmes correspondants sont testés sur l'enregistrement de la chaîne de tangage d'un avion, pour laquelle les modèles retenus sont des fonctions de transfert d'ordre deux (avec numérateur d'ordre un).

Nous remarquons, sur cet exemple où la période d'échantillonnage est assez grande (par rapport au temps de réponse du système) que l'influence du terme correctif est relativement importante : on observe une différence de 10 à 30 % sur les coefficients de la fonction de transfert. IL est donc nécessaire ici de discrétiser l'équation continue en faisant intervenir le terme $\hat{C}_k$, afin d'éliminer un biais du résultat final. Pour initialiser le filtre non linéaire, nous utilisons les informations de l'enregistrement (valeurs initiales des entrées, sorties et de leurs dérivées) et nous supposons avoir des connaissances a priori très imprécises sur les paramètres (valeurs initiales nulles et écarts-types initiaux 10 à 20 fois supérieurs aux paramètres). Pour tous les essais, nous réitérons trois fois le filtrage sur les mêmes données, afin d'obtenir une bonne convergence du filtre. Néanmoins, les résultats obtenus à l'issue du premier passage sont très voisins des valeurs finales (1 à 2 %).

ESSAI n°1 : transmittance : "commande au manche" - "dérivée de l'angle d'assiette" : $H\theta(p) = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p + p^2}$
Discretisation des équations continues au 1er ordre.

	a_0	σ_{a0}	a_1	σ_{a1}	b_0	σ_{b0}	b_1	σ_{b1}	$\sqrt{V}$
Initialisation	0	100	0	100	0	100	0	100	0,005
avant élimination	4,994	0,484	4,646	0,109	-16,406	1,925	-16,502	0,376	0,00240
après élimination	4,996	0,485	4,647	0,110	-16,413	1,925	-16,503	0,376	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	5,130	0,226	4,671	0,053	-16,957	0,849	-16,668	0,193	0,00209
après élimination	5,238	0,299	4,707	0,071	-17,376	1,128	-16,770	0,256	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	5,232	0,171	4,710	0,042	-17,357	0,641	-16,783	0,154	0,00203
après élimination	5,226	0,299	4,715	0,069	-17,337	1,126	-16,803	0,247	

Matrice de corrélation correspondant au 3ème passage : $\begin{bmatrix} 1 & 0,343 & -0,996 & 0,077 \\ & 1 & -0,370 & -0,853 \\ & & 1 & -0,049 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

ESSAI n°2 : transmittance : "commande au manche" - "dérivée de l'angle d'assiette" : $H\theta(p) = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p + p^2}$
Discretisation des équations continues faisant intervenir un terme correctif.

	a_0	σa_0	a_1	σa_1	b_0	σb_0	b_1	σb_1	$\sqrt{V}$
Initialisation	0	100	0	100	0	100	0	100	0,005
avant élimination	8,234	0,523	4,541	0,112	-29,165	2,044	-15,786	0,377	0,00258
après élimination	8,238	0,523	4,542	0,112	-29,178	2,045	-15,787	0,377	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	8,229	0,293	4,515	0,064	-28,783	1,120	-15,541	0,228	0,00278
après élimination	8,085	0,510	4,435	0,104	-28,186	1,959	-15,288	0,339	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	8,072	0,276	4,433	0,059	-28,127	1,054	-15,286	0,208	0,00265
après élimination	8,047	0,460	4,429	0,095	-28,029	1,769	-15,282	0,312	

Matrice de corrélation correspondant au 3ème passage : $\begin{bmatrix} 1 & 0,516 & -0,996 & 0,070 \\ & 1 & -0,541 & -0,736 \\ & & 1 & -0,041 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

ESSAI n° 2 : Transmittance : "commande au marche" - "facteur de charge" : $f_H(p) = \frac{b_1' + b_0'p}{a_0' + a_1'p + p^2}$
Discretisation des équations continues au 1er ordre.

	a_0'	$\sigma a_0'$	a_1'	$\sigma a_1'$	b_0''	$\sigma b_0'$	b_1'	$\sigma b_1'$	$\sigma^2 p'$
Initialisation	1	100	0	100	0	500	0	100	0,00
avant élimination	4,707	0,079	3,164	0,109	-91,91	7,99	-1,110	1,100	0,0056
après élimination	4,709	0,079	3,164	0,109	-91,93	7,99	-1,111	1,100	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	5,541	0,174	-1,41	0,009	-106,16	1,92	-1,118	0,879	0,0160
après élimination	5,509	0,199	3,490	0,139	-106,16	5,69	-1,115	0,852	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	5,550	0,141	3,477	0,076	-106,23	1,06	-1,113	0,596	0,0134
après élimination	5,544	0,250	3,492	0,139	-106,79	5,85	-1,117	0,526	

Matrice de corrélation correspondant au 3ème passage :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,937 & -0,992 & 0,709 \\ & 1 & -0,962 & 0,476 \\ & & 1 & -0,655 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ESSAI n°4 : transmittance : "commande au manche" - "facteur de charge" : $Hn(p) = \frac{b'_0 + b'_1 p}{a'_0 + a'_1 p + p^2}$

Discrétisation des équations continues faisant intervenir un terme correctif.

	a'_0	$\sigma a'_0$	a'_1	$\sigma a'_1$	b'_0	$\sigma b'_0$	b'_1	$\sigma b'_1$	$\sqrt{V'}$
Initialisation	0	100	0	100	0	500	0	100	0,02
avant élimination	6,615	0,321	3,604	0,161	-129,59	6,50	-5,163	0,951	0,0144
après élimination	6,653	0,322	3,613	0,162	-129,96	6,52	-5,134	0,953	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	6,661	0,156	3,597	0,086	-129,03	3,22	-4,671	0,645	0,0162
après élimination	6,729	0,324	3,610	0,162	-130,18	6,60	-4,000	1,036	
Initialisation	"	"	"	"	"	"	"	"	"
avant élimination	6,729	0,157	3,608	0,085	-130,19	3,21	-4,167	0,661	0,0161
après élimination	6,731	0,316	3,608	0,158	-130,22	6,43	-4,145	1,017	

Matrice de corrélation correspondant au 3ème passage : $\begin{bmatrix} 1 & 0,933 & -0,989 & 0,690 \\ & 1 & -0,961 & 0,458 \\ & & 1 & -0,629 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

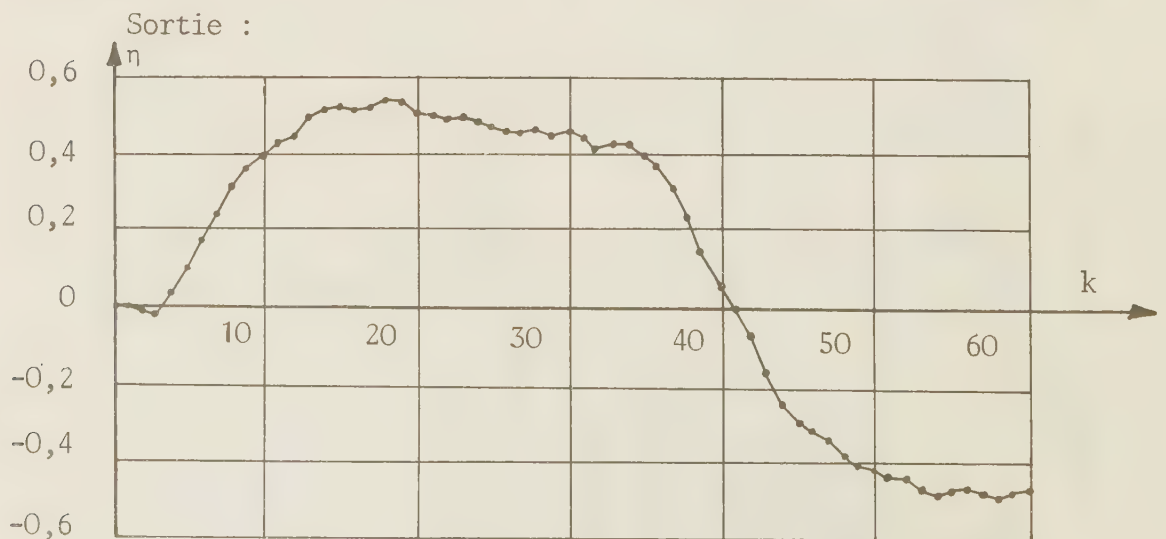
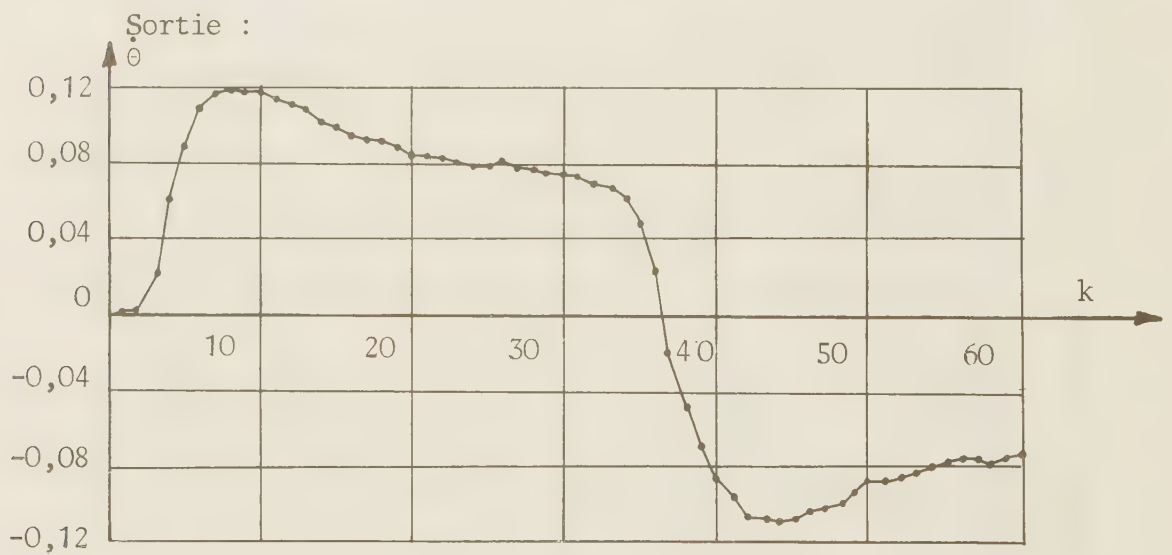
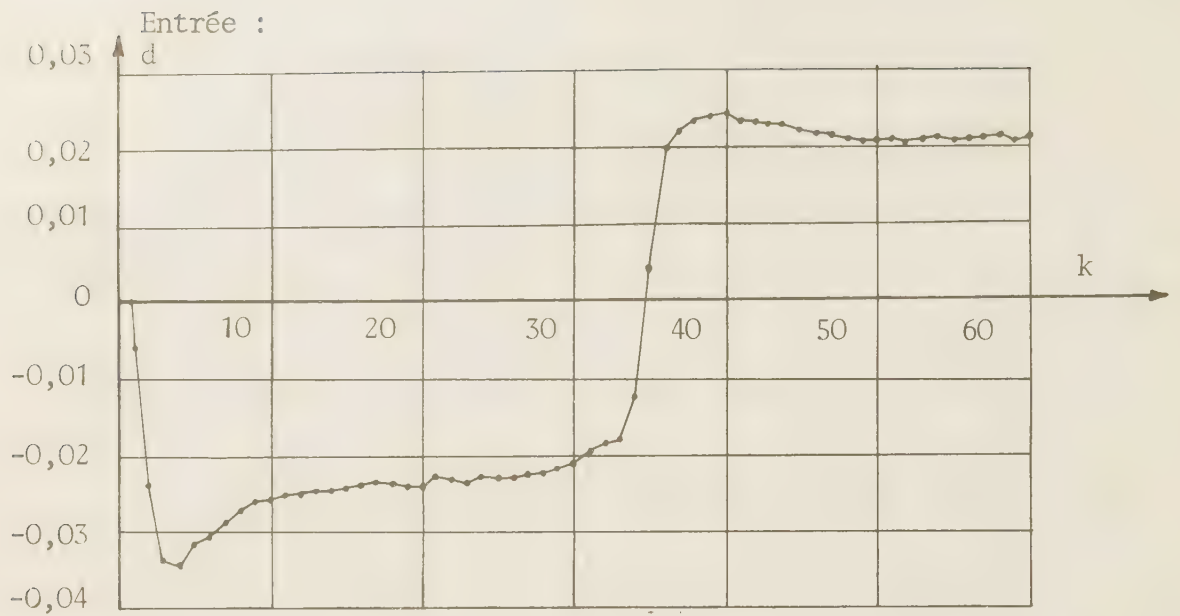


Fig. V -3 - Enregistrement entrée-sorties

d : commande au manche
 $\dot{\theta}$: dérivée de l'angle d'assiette
 η : facteur de charge

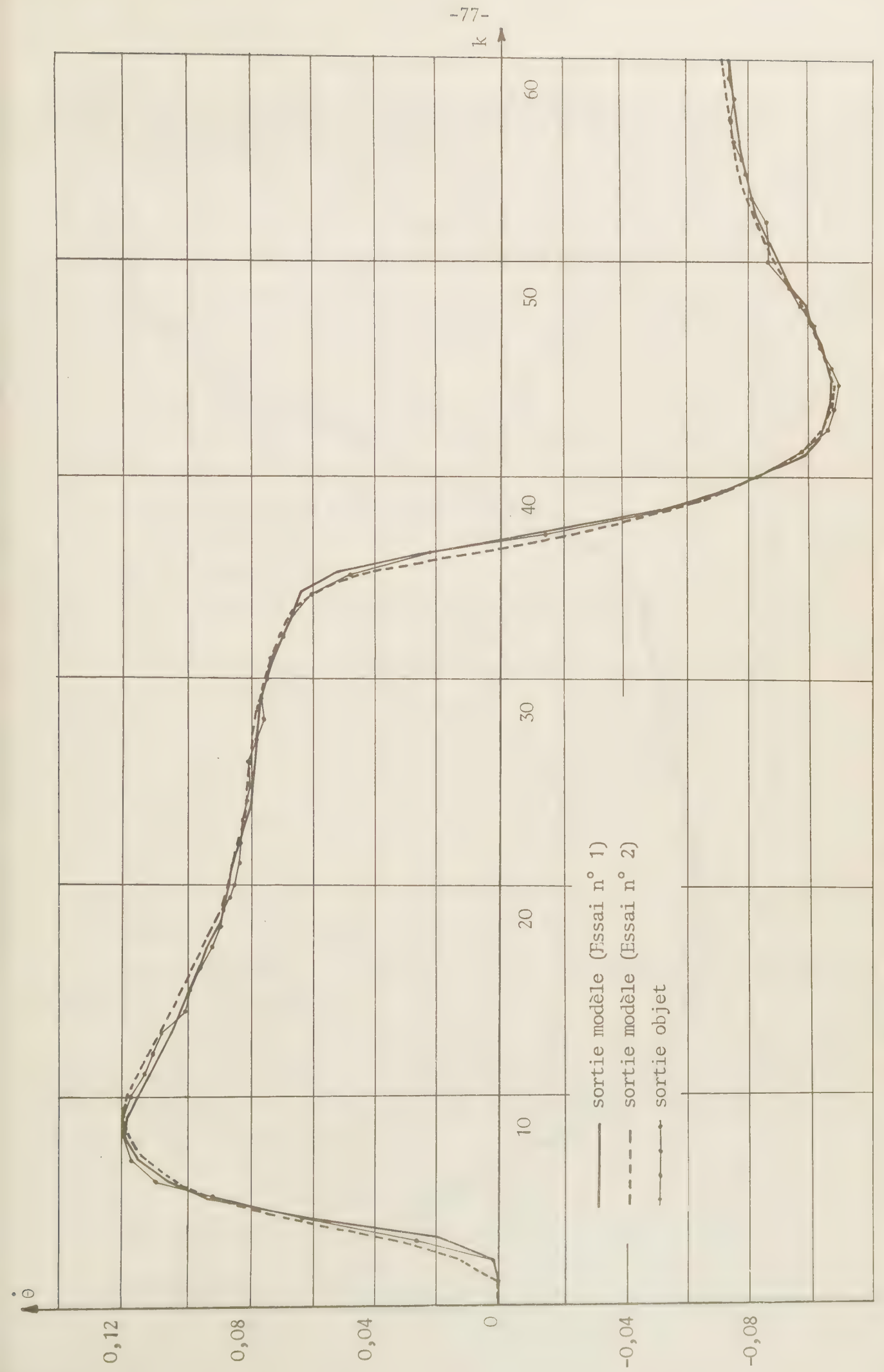
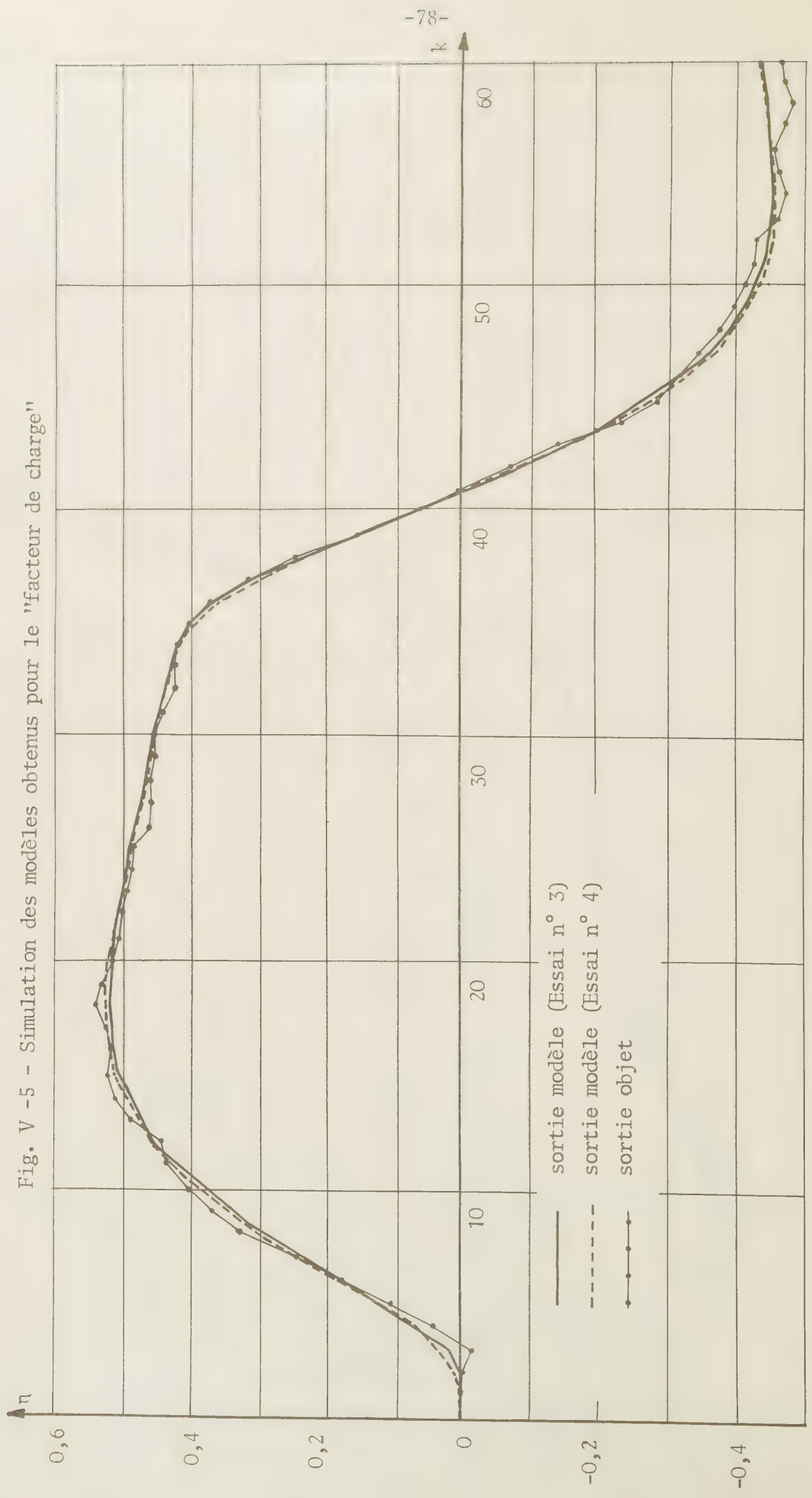


Fig. V-4 - Simulation des modèles obtenus pour la "dérivée de l'angle d'assiette"

Fig. V -5 - Simulation des modèles obtenus pour le "facteur de charge"



2) IDENTIFICATION D'UNE UNITE PILOTE GENERATEUR DE VAPEUR

2-1) Description de l'installation

L'unité pilote du Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. à Nantes est constituée d'une chaudière marine pouvant débiter 1500 kg/h de vapeur à 26 bars, surchauffée à 360° dans un groupe turbo-dynamo de 85 KW.

L'ensemble comporte plusieurs régulations annexes (niveau ballon, débit d'air comburant, etc...) mais le problème principal concerne le système :

à 2 commandes :

- le débit de combustible QC
- le débit d'eau de désurchauffe QD

à 2 grandeurs réglées :

- la pression de vapeur surchauffée PS
- la température de vapeur surchauffée TS

à une perturbation :

- le débit de vapeur à l'admission turbine QS

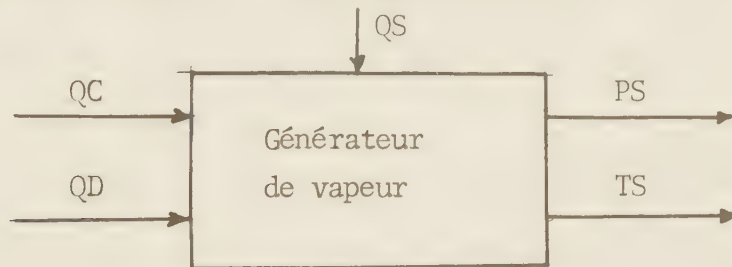


Fig. V-6

On mesure, d'autre part, la pression au ballon PB.

Nous choisissons de caractériser chacune des variables de sortie par une équation d'évolution continue.

Nous remarquons tout d'abord, après un examen rapide du comportement de l'installation, que la pression au ballon PB se comporte comme un intégrateur vis-à-vis des grandeurs d'entrée. On choisit donc de représenter l'évolution de PB par une équation de la forme :

$$\frac{dPB}{dt} = a QC - b(QS-QD) + c \quad (V-8)$$

où l'on notera que QS-QD est la quantité de vapeur sortant du ballon.

D'autre part, il existe entre la pression de la vapeur au ballon et la pression de la vapeur à la sortie du désurchauffeur une perte de charge qui

dépend bien sûr de la vitesse d'écoulement du fluide, c'est-à-dire de QS. Pour de faibles variations autour d'un régime nominal, une relation linéaire est suffisante et nous écrirons :

$$PS = PB - (d + e (QS-QSN)) \quad (V-9)$$

avec QSN : débit de vapeur nominal à l'admission turbine.

L'examen de la forme des réponses de la température de surchauffe à des échelons sur les débits de combustible QC d'eau de désurchauffe QD et de vapeur QS nous permet d'adopter pour modèle de TS l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2(TS-TSN)}{dt^2} + a_2 \frac{d(TS-TSN)}{dt} + a_1 (TS-TSN) = & b_{11}(QC-QCN) + b_{12} \frac{d(QC-QCN)}{dt} \\ & + b_{21}(QD-QDN) + b_{22} \frac{d(QD-QDN)}{dt} \\ & + b_{31}(QS-QSN) + b_{32} \frac{d(QS-QSN)}{dt} \end{aligned} \quad (V-10)$$

que nous pouvons mettre sous la forme d'état suivante :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QC - QCN \\ QD - QDN \\ QS - QSN \end{bmatrix} \quad (V-11)$$

$$TS = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{z} + TSN \quad (V-12)$$

Le modèle adopté peut donc être représenté par le diagramme de la figure (V-7).

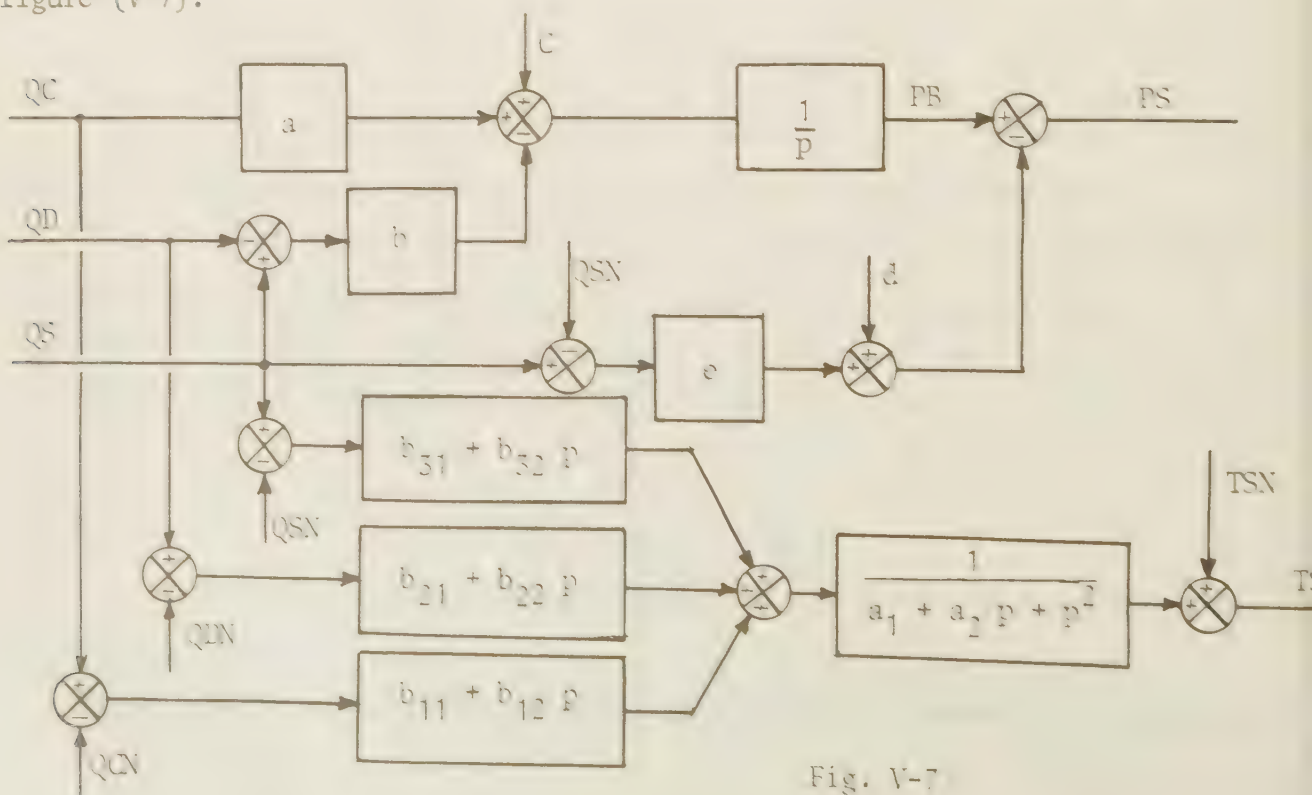


Fig. V-7

2-2) Mise en oeuvre de l'identification

Nous supposons que les erreurs de mesures des différentes grandeurs observées peuvent être représentées par des séquences pseudo-blanches centrées.

$$UC = QC + w_C$$

$$UD = QD + w_D$$

$$US = QS + w_S$$

$$SP = PS + v_P$$

$$ST = TS + v_T$$

$$SB = PB + v_B$$

On notera W_C , W_D , W_S les variances de w_C , w_D , w_S et V_P , V_T , V_B les variances de v_P , v_T , et v_B .

Utilisons maintenant le filtre "continu-discret" du chapitre III. Pour cela, discrétisons tout d'abord les équations (V-8), (V-9) et (V-11) :

On note $QC_k = QC(t_k)$, $QD_k = QD(t_k)$, ... etc ...

$$PB_{k+1} = PB_k + T [a QC_k - b(QS_k - QD_k) + c] + \hat{e}B_k$$

$$PS_{k+1} = PB_{k+1} - [d + e(QS_{k+1} - QSN)]$$

$$\begin{cases} z_{k+1}^1 = z_k^1 + T [-a_1 z_k^2 + b_{11}(QC_k - QCN) + b_{21}(QD_k - QDN) + b_{31}(QS_k - QSN)] + \hat{e}_k^1 \\ z_{k+1}^2 = z_k^2 + T [z_k^1 - a_2 z_k^2 + b_{12}(QC_k - QCN) + b_{22}(QD_k - QDN) + b_{32}(QS_k - QSN)] + \hat{e}_k^2 \\ TS_k = z_k^2 + TSN \end{cases}$$

Avec les notations définies plus haut, ces équations deviennent les suivantes :

$$\begin{cases} PB_{k+1} = PB_k + T [a(UC - w_C) - b(US - UD - w_S + w_D) + c] + \hat{e}B_k \\ SB_k = PB_k + v_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} PS_{k+1} = SB_{k+1} - v_B - [d + e(US_{k+1} - QSN - w_S)] \\ SP_k = PS_k + v_P \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{k+1}^1 = z_k^1 + T [-a_1 z_k^2 + b_{11}(UC_k - QCN - w_C) + b_{21}(UD_k - QDN - w_D) + b_{31}(US_k - QSN - w_S)] + \hat{e}_k^1 \\ z_{k+1}^2 = z_k^2 + T [z_k^1 - a_2 z_k^2 + b_{12}(UC_k - QCN - w_C) + b_{22}(UD_k - QDN - w_D) + b_{32}(US_k - QSN - w_S)] + \hat{e}_k^2 \\ ST_k = z_k^2 + TSN + v_T \end{cases}$$

Introduisons alors les vecteurs paramètres :

$$\underline{\theta}_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \underline{\theta}_P = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad \underline{\theta}_T = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}$$

et les états généralisés :

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} PB_k \\ \underline{\theta}_B \end{bmatrix} \quad \underline{y}_k = \begin{bmatrix} PS_k \\ \underline{\theta}_P \end{bmatrix} \quad \underline{z}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ z_k^1 \\ z_k^2 \\ \underline{\theta}_T \end{bmatrix}$$

On remarquera que nous identifions la valeur nominale TSN de la température TS à partir de valeurs nominales données sur les entrées.

Les équations d'état généralisées sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 + T \cdot UC \cdot x_k^2 - T(US-UD)x_k^3 + T \cdot x_k^4 - T \cdot w_C \cdot x_k^2 + T(w_S - w_D)x_k^3 + \hat{c}B_k \end{cases} \quad (V-13)$$

$$\begin{cases} x_{k+1}^i = x_k^i \quad \forall i = 2, \dots, 4 \end{cases} \quad (V-14)$$

$$\begin{cases} SB_k = x_k^1 + v_B \end{cases} \quad (V-15)$$

$$\begin{cases} y_{k+1}^1 = SB_{k+1} - y_k^3 - (US_{k+1} - QSN) y_k^2 + w_S \cdot y_k^2 - v_B \end{cases} \quad (V-16)$$

$$\begin{cases} y_{k+1}^i = y_k^i \quad \forall i = 2, 3 \end{cases} \quad (V-17)$$

$$\begin{cases} SP_k = y_k^1 + v_P \end{cases} \quad (V-18)$$

$$\begin{cases} z_{k+1}^1 = z_k^1 - T \cdot z_k^2 z_k^3 + T(UC_k - QCN) z_k^5 + T(UD_k - QDN) z_k^6 + T(US_k - QSN) z_k^7 \\ \quad - T \cdot w_C \cdot z_k^5 - T \cdot w_D \cdot z_k^6 - T \cdot w_S \cdot z_k^7 + \hat{c}^1_k \end{cases} \quad (V-19)$$

$$\begin{cases} z_{k+1}^2 = z_k^2 + T \cdot z_k^1 - T \cdot z_k^2 z_k^4 + T(UC_k - QCN) z_k^8 + T(UD_k - QDN) z_k^9 + T(US_k - QSN) z_k^{10} \\ \quad - T \cdot w_C \cdot z_k^8 - T \cdot w_D \cdot z_k^9 - T \cdot w_S \cdot z_k^{10} + \hat{c}^2_k \end{cases} \quad (V-20)$$

$$\begin{cases} z_{k+1}^i = z_k^i \quad \forall i = 3, \dots, 11 \end{cases} \quad (V-21)$$

$$\begin{cases} ST_k = z_k^2 + z_k^{11} + v_T \end{cases} \quad (V-22)$$

La programmation du filtre à l'aide des sous-programmes réalisant les opérations élémentaires est alors la suivante :

. équation (V-13) :

```
CALL CADDE (CX,X,4,4,1.,1,T*UC,2)
CALL CADDE (CX,X,4,4,1.,1,-T*(US-UD),3)
CALL CADDE (CX,X,4,4,1.,1,T,4)
X(1) = X(1) + CB
CX(1,1) = CX(1,1) + T*T*(WC*(X(2)*X(2) + CX(2,2)) +
(WC + WD)*(X(3)*X(3) + CX(3,3)))
```

. équation (V-15) :

```
CALL CESTE (CX,X,4,4,SB,1.,1,0.,4,VB,EC,VC)
```

. équation (V-16) :

```
CALL CADDE (CY,Y,3,3,0.,1,-1.,3)
CALL CADDE (CY,Y,3,3,1.,1,QSN-US,2)
Y(1) = Y(1) + SB
CY(1,1) = CY(1,1) + WS*(Y(2)*Y(2) + CY(2,2)) + VB
```

. équation (V-18) :

```
CALL CESTE (CY,Y,3,3,SP,1.,1,0.,3,VP,EC,VC)
```

. équation (V-19) :

```
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,0.,12,1.,1)
```

la composante n°12 sert de zone de mémoire

```
CALL CPROD (CZ,Z,12,12,1.,1,-T,2,3)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,1.,1,T*(UC-QCN),5)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,1.,1,T*(UD-QDN),6)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,1.,1,T*(US-QSN),7)
Z(1) = Z(1) + C1
CZ(1,1) = CZ(1,1) + T*T*(WC*(Z(5)*Z(5) + CZ(5,5)) +
WD*(Z(6)*Z(6) + CZ(6,6)) + WS*(Z(7)*Z(7) + CZ(7,7)))
```

. équation (V-20) :

```
CALL CPROD (CZ,Z,12,12,1.,2,-T,2,4)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,1.,2,T,12)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,T*(UC-QCN),8)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,T*(UD-QDN),9)
CALL CADDE (CZ,Z,12,12,T*(US-QSN),10)
Z(2) = Z(2) + C2
CZ(2,2) = CZ(2,2) + T*T*(WC*(Z(8)*Z(8) + CZ(8,8)) +
WD*(Z(9)*Z(9) + CZ(9,9)) + WS*(Z(10)*Z(10) + CZ(10,10)))
```

. équation (V-22) :

CALL CESTE (CZ,Z,12,12,ST,1.,2,1.,11,VT,EC,VC)

2-3) Estimation en ligne des paramètres

Le programme d'identification a été implanté sur un ensemble hybride (EAI 640, TR 48) et fonctionne en temps réel et en ligne avec l'unité pilote. Les valeurs des différentes grandeurs mesurées (UC,UD,US,SB,SP,ST) sont acquises par le calculateur digital par l'intermédiaire de la console analogique.

La période d'échantillonnage doit être choisie supérieure au temps de calcul de l'algorithme d'identification (3 à 4 s.) et pour tous nos essais, nous avons adopté $T = 10$ s. C'est l'unité logique qui, grâce à un signal d'interruption, commande l'acquisition des mesures et le début de la phase de calcul. Les résultats sortent sous forme analogique et sont visualisés sur un traceur multivoies, d'où le schéma simplifié de fonctionnement (fig. V-8).

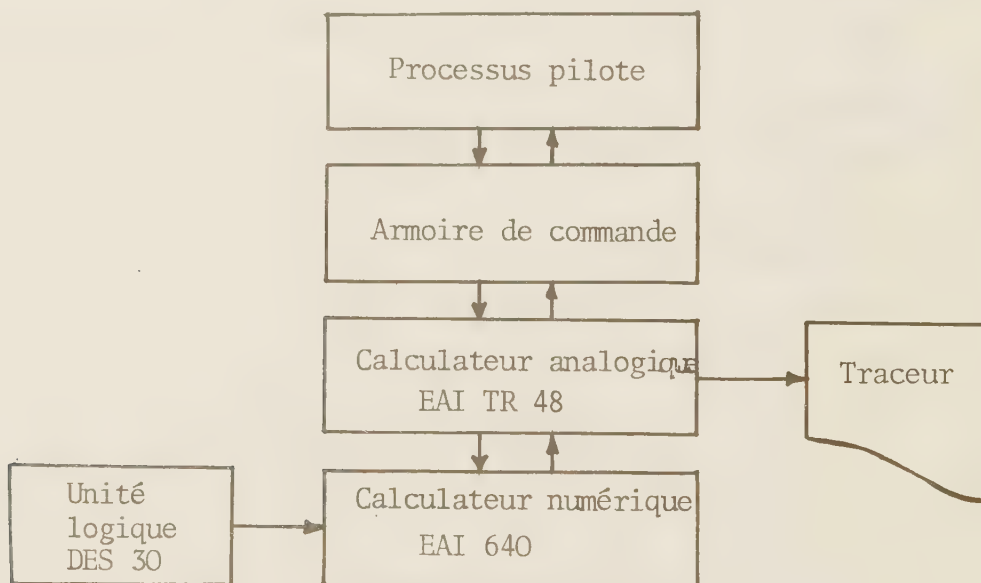


Fig. V-8

2-4) Résultats de l'identification

Parmi les nombreux essais effectués, nous présentons dans ce paragraphe les résultats d'une identification faite le 21 février 1974.

Notre connaissance de l'installation et les résultats d'essais antérieurs nous permettent de donner une initialisation relativement bonne des paramètres, que nous accompagnons toutefois de variances initiales assez grandes (de l'ordre de la valeur du paramètre au carré).

Nous supposons connues les variances W_C , W_D , W_S des bruits sur QC, QD et QS et nous identifions les variances V_B , V_P , V_T des bruits sur PB, PS et TS, grâce à l'algorithme simplifié décrit en (IV-5).

Nous avons fait fonctionner le programme pendant 2 h 20 mn soit 840 points ($T = 10$ s.) et les résultats obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} \text{QCN} &= 80,0 \text{ kg/h} & W_C &= (1,0)^2 \\ \text{QDN} &= 60,0 \text{ kg/h} & W_D &= (1,0)^2 \\ \text{QSN} &= 1000 \text{ kg/h} & W_S &= (25,0)^2 \end{aligned}$$

paramètres	valeur initiale	écart type initial	valeur finale	écart type final
a	0,00035	0,00020	0,0003852	0,0000035
b	0,00003	0,00001	0,00003496	0,00000034
c	-0,002	0,002	0,002971	0,000250
d	1,5	0,2	1,261	0,011
e	0,002	0,005	0,001900	0,000181
a_1	0,0001	0,0001	0,00002553	0,00000075
a_2	0,025	0,020	0,01090	0,00015
b_{11}	0,0001	0,0001	0,00004155	0,00000108
b_{21}	-0,0001	0,0001	-0,00001578	0,00000045
b_{31}	-0,000005	0,000005	-0,000001975	0,000000065
b_{12}	0,005	0,005	0,007255	0,000076
b_{22}	-0,0005	0,0005	-0,004447	0,000062
b_{32}	-0,00025	0,00025	-0,0006360	0,0000110
TSN	300,0	2,0	300,60	0,07

Variances	initiales	finales
V_B	$(0,2)^2$	$(0,074)^2$
V_S	$(0,1)^2$	$(0,050)^2$
V_T	$(1,0)^2$	$(1,28)^2$

identifier. A chaque itération, le temps de calcul correspondant aux opérations de filtrage (3 à 4 secondes) est très inférieur à la période d'échantillonnage (10 secondes) et le temps libre restant pourrait être utilisé par exemple pour construire une commande adaptative. Notre connaissance de l'installation nous permet de partir de l'initialisation la meilleure possible et la durée de l'expérience d'identification est d'environ dix fois le temps de réponse du système. Les écarts-types qui accompagnent les valeurs finales sont très faibles (1 à 2 % de la valeur des paramètres), ce qui nous autorise à accorder une assez grande confiance au modèle obtenu comme le confirme une simulation. Notons encore que ce modèle a permis de mettre en oeuvre une commande hiérarchique de l'unité pilote qui donne toute satisfaction et qui répond aux exigences formulées (COEURDEUIL |3|).

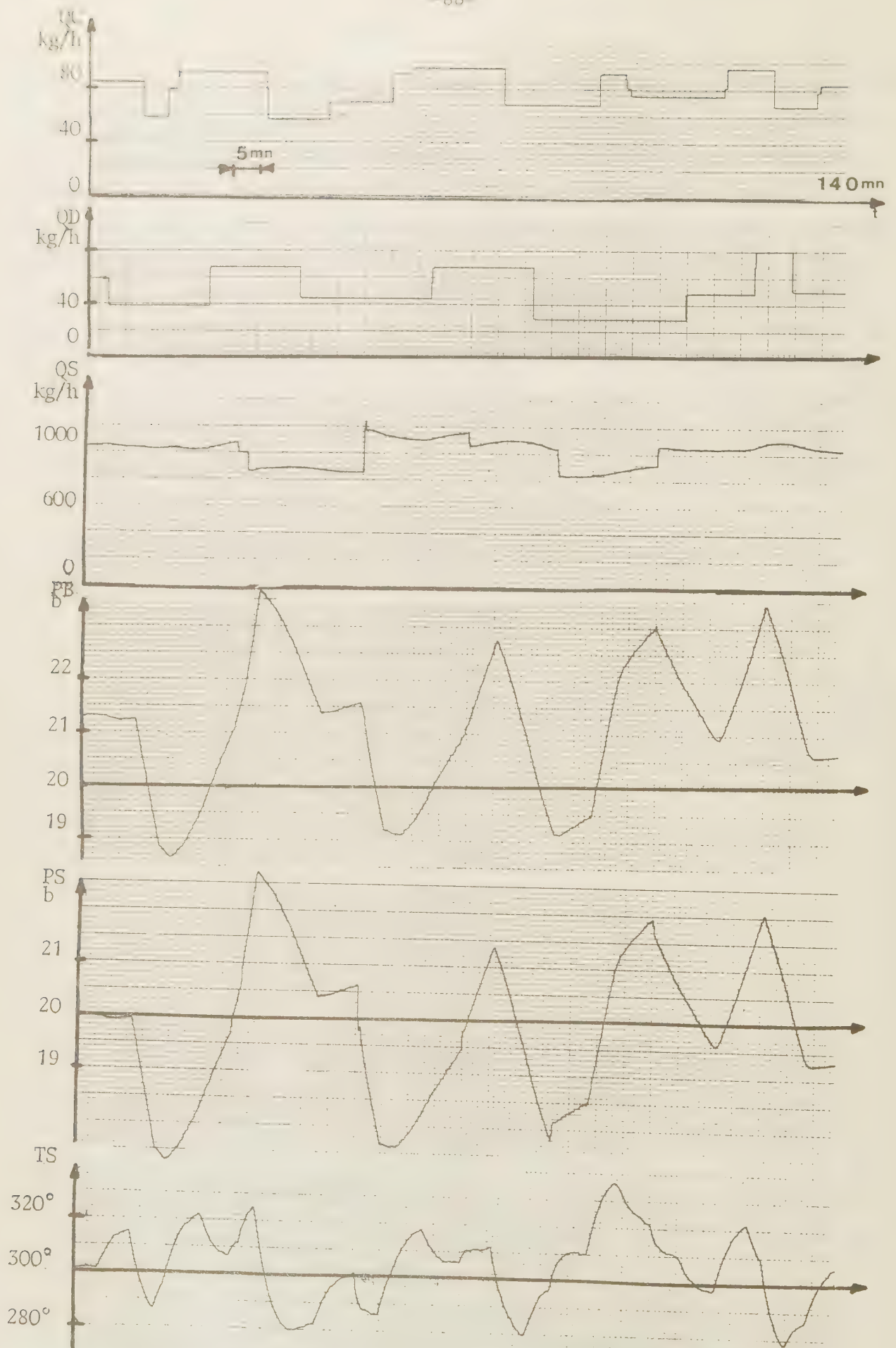
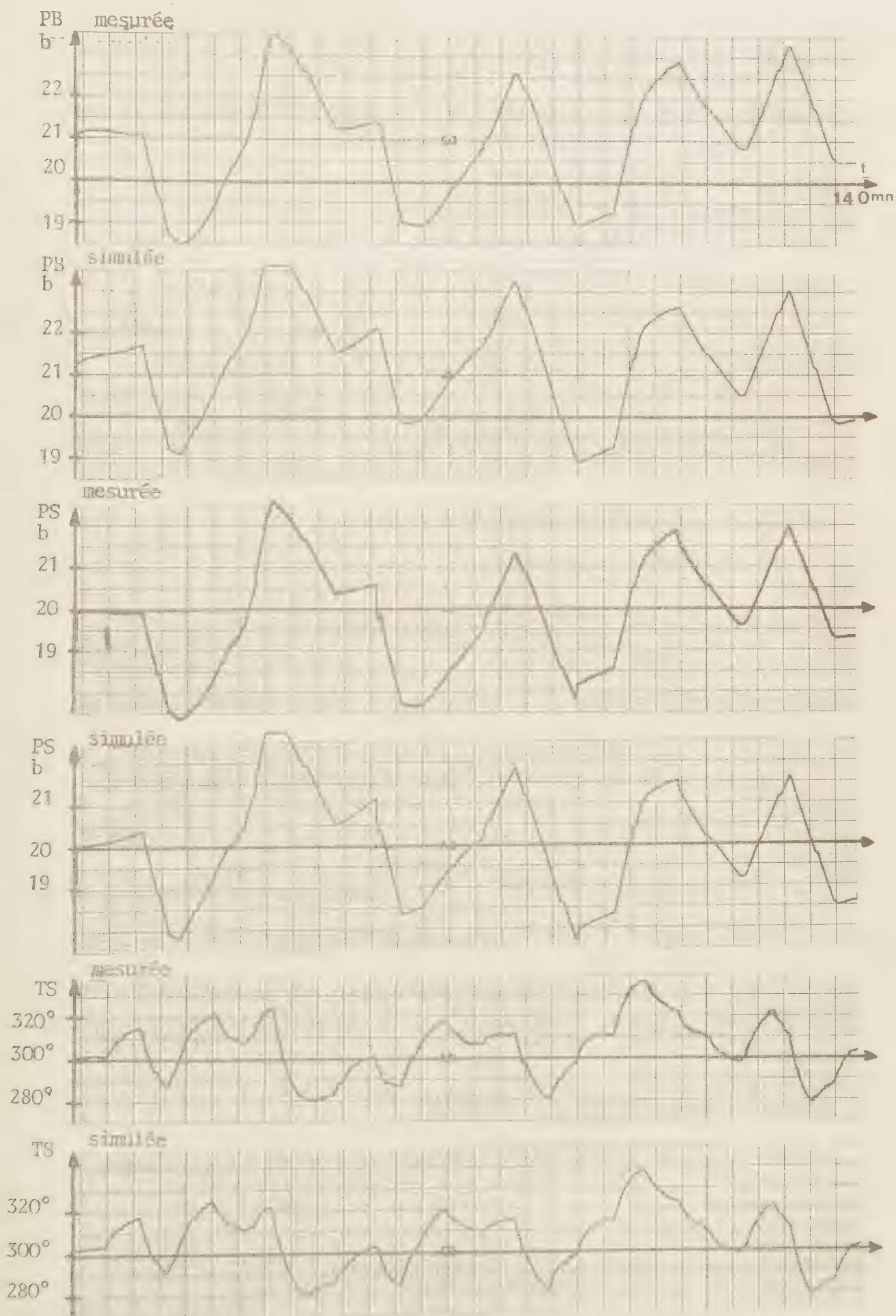


Fig. V-10 - Générateur de vapeur E.N.S.M.-Enregistrement des entrées-sorties
Essai du 21/2/74

Fig. V-11 - Générateur de vapeur E.M.S.A. - Comparaison des sorties réelles et simulées.



3) IDENTIFICATION D'UN SYSTEME MULTI-ENTREES, MONO-SORTIE

3-1) Modèle adopté

On se propose ici d'identifier les systèmes représentés par le modèle discret, linéaire et stationnaire de la figure (V-12).

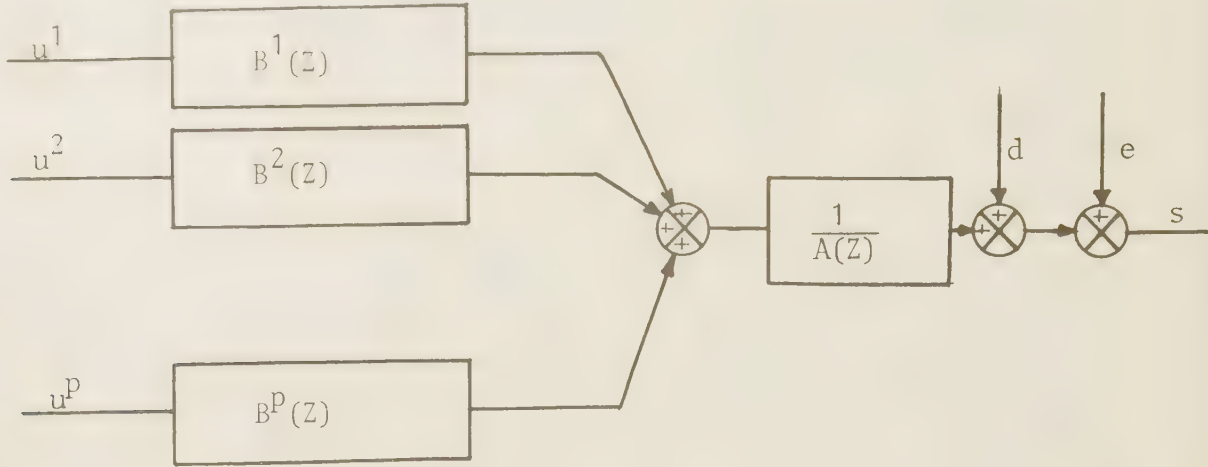


Fig. V-12

où
$$A(Z) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i Z^{i-(n+1)} \quad (V-23)$$

$$B^j(Z) = \sum_{i=1}^n b_i^j Z^{i-(n+1)} \quad (V-24)$$

d est une composante continue et e_k une séquence pseudo-blanche centrée de variance V_e .

A partir de (V-23) et (V-24), nous pouvons écrire l'équation aux différences suivante :

$$(s_{k+n+1} - e_{k+n+1} - d) = \sum_{i=1}^n a_i (s_{k+i} - e_{k+i} - d) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_i^j u_{k+i}^j$$

et en posant $\delta = d (1 - \sum_{i=1}^n a_i)$, il vient :

$$s_{k+n+1} = \delta + \sum_{i=1}^n a_i s_{k+i} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_i^j u_{k+i}^j - \sum_{i=1}^n a_i e_{k+i} + e_{k+n+1} \quad (V-25)$$

3-2) Mise en oeuvre de l'identification

De la relation (V-25), on peut déduire le système d'état suivant :

$$\underline{x}_{k+n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_{k+n} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{k+n}^T \quad \underline{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{k+n+1} \\ e_{k+n+1} \end{bmatrix}$$

$$s_{k+n+1} = [0 \dots \dots \dots 0 \quad 1] \underline{x}_{k+n+1} + [0 \dots \dots \dots 0 \quad 1] \underline{\theta}$$

avec :

$$\underline{x}_{k+n}^T = [e_k \ e_{k+1} \ \dots \ e_{k+n} \ | \ s_{k+n}]$$

On notera :

$\underline{\theta}$ le vecteur paramètre : ($\dim \underline{\theta} = n (p+1) + 1$)

$$\underline{\theta}^T = [a_1 \ \dots \ a_n \ | \ b_1^1 \ \dots \ b_n^1 \ | \ b_1^2 \ \dots \ b_1^p \ \dots \ b_n^p \ | \ \delta]$$

$\underline{\alpha}_{k+n}$ est le vecteur suivant : ($\dim \underline{\alpha}_{k+n} = n (p+1) + 1$)

$$\underline{\alpha}_{k+n}^T = [s_{k+1} \ \dots \ s_{k+n} \ | \ u_{k+1}^1 \ \dots \ u_{k+n}^1 \ | \ u_{k+1}^2 \ \dots \ u_{k+n}^p \ | \ 0]$$

Si l'on considère maintenant l'état généralisé :

$$\underline{z}_{k+n} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_{k+n} \\ \underline{x}_{k+n} \end{bmatrix}$$

où les paramètres sont stationnaires :

$$\underline{\theta}_{k+n+1} = \underline{\theta}_{k+n}$$

Nous obtenons le système non linéaire suivant :

$$\underline{z}_{k+n+1} = \underline{f}_{k+n} (\underline{z}_{k+n}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{k+n+1} \\ e_{k+n+1} \end{bmatrix} \quad (V-26)$$

$$s_{k+n+1} = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \underline{z}_{k+n+1} \quad (V-27)$$

détaillons maintenant l'équation (V-26) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{k+n+1}^1 = z_{k+n}^1 \\ \vdots \\ z_{k+n+1}^{n(p+1)+1} = z_{k+n}^{n(p+1)+1} \\ \hline z_{k+n+1}^{n(p+1)+2} = z_{k+n}^{n(p+1)+3} \\ \vdots \\ z_{k+n+1}^i = z_{k+n}^{i+1} \\ \vdots \\ z_{k+n+1}^{n(p+2)+1} = z_{k+n}^{n(p+2)+2} \\ \hline z_{k+n+1}^{n(p+2)+2} = e_{k+n+1} \\ \hline z_{k+n+1}^{n(p+2)+3} = \sum_{i=1}^n z_{k+n}^i z_{k+n}^{n(p+1)+1+i} + \sum_{i=1}^{n(p+1)} \alpha_{k+1}^i z_{k+1}^i + e_{k+n+1} \\ \hline s_{k+n+1} = z_{k+n+1}^{n(p+1)+1} + z_{k+n+1}^{n(p+2)+3} \end{array} \right. \quad (V-28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{k+n+1} = z_{k+n+1}^{n(p+1)+1} + z_{k+n+1}^{n(p+2)+3} \end{array} \right. \quad (V-29)$$

Nous voyons alors que la représentation d'état choisie conduit à une programmation du filtre relativement simple. En effet, les $n(p+1)+1$ premières composantes du système (V-28) correspondant à l'évolution des paramètres (stationnaires) ne nécessitent aucune opération.

Pour les n composantes suivantes (de la composante $n(p+1)+2$ à la composante $n(p+2)+1$), il y a simplement un décalage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_{k+n+1/k+n}^{i-1} = \hat{z}_{k+n/k+n}^i \quad \forall i = n(p+1)+3, \dots, n(p+2)+1 \\ M_{k+n+1/k+n}^{i-1, j-1} = M_{k+n/k+n}^{ij} \quad \forall i, j = n(p+1)+3, \dots, n(p+2)+1 \\ M_{k+n+1/k+n}^{i-1, j} = M_{k+n+1/k+n}^{j, i-1} = M_{k+n/k+n}^{ij} \quad \begin{array}{l} \forall i = n(p+1)+3, \dots, n(p+2)+1 \\ \forall j \neq n(p+1)+3, \dots, n(p+2)+1 \end{array} \end{array} \right.$$

pour la composante n° $n(p+2)+2$, il suffit de la remplacer par la variable indépendante e_{k+n+1} :

$$\begin{cases} \hat{z}_{k+n+1/k+n}^{n(p+2)+2} = 0 \\ M_{k+n+1/k+n}^{n(p+2)+2,i} = M_{k+n+1/k+n}^{i,n(p+2)+2} = 0 \quad \forall i \neq n(p+2)+2 \\ M_{k+n+1/k+n}^{n(p+2)+2,n(p+2)+2} = V_e \end{cases}$$

La programmation des équations ci-dessus est très facile et ne nécessite que quelques instructions qu'il est inutile de détailler ici.

Pour la dernière composante, il y a une somme de n produits et une combinaison linéaire de $n(p+1)$ termes. On appliquera donc n fois la 2ème transformation élémentaire (CPROD) et $n(p+1)$ fois la 1ère transformation élémentaire (CADDE) avec les coefficients zéro et un pour la 2ème et zéro et α_{k+1}^i pour la 1ère.

Il reste alors à prendre en compte le terme e_{k+n+1} . Pour cela, il suffit d'ajouter V_e sur la composante $M_{k+n+1/k+n}^{n(p+2)+3,n(p+2)+3}$ et de programmer la relation évidente ci-dessous :

$$M_{k+n+1/k+n}^{n(p+2)+3,n(p+2)+2} = M_{k+n+1/k+n}^{n(p+2)+2,n(p+2)+3} = V_e$$

Enfin, pour obtenir l'estimation conditionnelle, on appellera le sous-programme CESTE en utilisant la mesure s_{k+n+1} et en faisant intervenir les composantes $n(p+1)+1$ et $n(p+2)+3$.

3-3) Initialisation de l'algorithme

Rappelons que l'état généralisé a été construit de la façon suivante :

$$\underline{z}_{k+n} = \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \underline{x}_{k+n} \end{bmatrix} \quad \text{avec}$$

$$\underline{x}_{k+n}^T = [e_k \ e_{k+1} \ \dots \ e_{k+n} \ s_{k+n}] \text{ et}$$

$$\underline{\theta}^T = [a_1 \ \dots \ a_n \mid b_1^1 \ \dots \ b_n^1 \mid b_1^2 \ \dots \mid b_1^p \ \dots \ b_n^p \mid \delta]$$

pour l'état proprement dit, il s'agit d'initialiser :

$$\underline{x}_0 = [e_{-n+1} \ e_{-n+2} \ \dots \ e_0 \ s_0]$$

e_k étant une séquence pseudo-blanche centrée de variance V_e , il suffira de choisir :

$$\hat{\underline{x}}_{0/0} = \underline{0} \quad \text{et} \quad M_{\underline{x}_{0/0}} = V_e \cdot \mathbf{1}$$

On remarquera qu'il est inutile d'initialiser la composante s_o , celle-ci étant inutilisée.

Pour les paramètres, nous supposons avoir des connaissances a priori relativement imprécises :

$$\hat{\theta}_{o/o} = \underline{0} \text{ et } M\theta_{o/o} \text{ diagonale telle que :}$$

- les écarts types des a_i soient les coefficients du binôme, ce qui correspond au cas le plus défavorable où tous les modules (réels) des zéros de $A(Z)$ sont égaux à un ;
- les écarts types des b_j^i égaux à un (en pratique, on vérifie que, lorsque les gains statiques sont proches de un, les b_j^i sont toujours inférieurs à un) ;
- δ a un écart type de 10 (choisi expérimentalement), ceci nous permet d'avoir une initialisation standard, quel que soit le système à identifier.

3-4) Application à l'identification de la Centrale Thermique de Pont sur Sambre

Les données sur lesquelles nous avons travaillé sont celles proposées pour le 3ème Congrès IFAC de La Haye par J. RICHALET (Test cases B). Il s'agit d'un enregistrement effectué sur une chaudière de la Centrale E.D.F. de Pont sur Sambre, dont le principe de fonctionnement est identique à celle de la Tranche 5 de la Centrale de Nantes-Cheviré décrite au chapitre VI.

Le système représenté figure (V-12) possède :

- 5 entrées :

- C_b le débit de combustible
- Q_a le débit d'air de combustion
- Q_d le débit d'eau de désurchauffe
- O_s l'ouverture soupape
- R_y la répartition des fumées

- 3 sorties :

- P_V la pression de vapeur surchauffée à l'admission du corps HP
- T_s la température de vapeur surchauffée à l'admission du corps HP
- T_{rs} la température de vapeur resurchauffée à l'admission du corps HP.

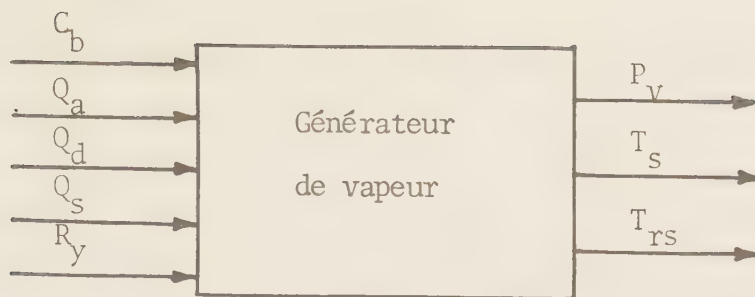


Fig. V-12

Nous disposons d'un enregistrement de 2200 points pour une période d'échantillonnage de $T = 10,24$ s, soit d'une durée de 6 h 15 mn 28 s.

Lorsque le nombre de paramètres à identifier est assez important, il faut disposer d'un enregistrement entrées-sorties relativement long pour observer une bonne convergence du filtre. On peut, cependant, avec un enregistrement de durée raisonnable, réitérer le filtrage sur les mêmes données avec pour valeurs initiales les valeurs finales du passage précédent. Pour pouvoir juger de la qualité du résultat, une simulation nous donne à chaque passage la sortie du modèle sm_k ainsi que la séquence d'erreur objet-modèle e_k^* . On peut alors calculer la variance V_e^* de la séquence e_k^* et la comparer à la variance V_e de la séquence e_k fournie par le filtre secondaire d'estimation des variances (chapitre IV, paragraphe 5). On détermine enfin l'erreur quadratique moyenne e_q :

$$eq\% = 100 \times \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (s_k - sm_k)^2}{\sum_{K=1}^N (s_k - \bar{s})^2}}$$

$\bar{s}$ étant la valeur moyenne de la sortie s_k et N le nombre de points total de l'enregistrement.

C'est donc sur les données de la chaudière de Pont sur Sambre que nous avons testé systématiquement l'évolution des variances V_e et V_e^* et de l'écart quadratique moyen au cours des différents passages en fonction du degré n choisi pour le modèle. Les résultats ont été les suivants :

- Ecart-type de e_k

Sortie	Degré n	Passage n°									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_v	2	27,75	38,40	38,59	38,36	38,19	38,08				
	3	22,46	32,50	35,89	36,68	36,78	36,72				
	4	19,20	25,50	30,78	33,53	34,63	35,25	35,38	35,42	35,44	35,46
	5	19,57	18,89	23,11	26,67	28,97	30,70	32,62	32,46	32,20	31,99
T_s	2	25,51	31,17	28,76	28,00	27,74	27,64				
	3	17,76	17,07	20,61	21,54	21,89	22,14				
	4	19,19	16,68	14,41	15,94	14,45	14,97	15,08	15,05	14,95	14,85
	5	19,72	18,55	15,93	13,59	12,02	11,57	11,84	12,15	12,43	12,57
T_{rs}	2	21,08	26,83	27,66	27,72	27,67	27,64				
	3	17,56	17,83	21,27	23,04	23,46	23,42				
	4	19,06	16,18	15,52	18,17	21,05	22,20	22,44	22,41	22,29	22,15
	5	19,62	17,55	15,07	14,59	16,28	18,70	20,16	20,48	20,36	20,15

- Ecart-type de e_k^*

Sortie	Degré n	Passage n°									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_v	2	98,60	38,40	38,04	37,94	37,89	37,87				
	3	93,16	37,25	36,27	36,09	36,07	36,05				
	4	63,86	40,17	37,80	36,77	36,34	36,02	36,01	35,98	35,98	35,97
	5	98,96	57,14	46,02	37,87	37,70	33,66	32,90	32,18	31,90	31,71
T_s	2	67,86	29,90	28,56	28,09	27,88	27,78				
	3	46,83	29,65	23,53	22,64	22,47	22,34				
	4	37,10	28,91	30,24	22,87	20,50	18,90	18,58	18,39	18,57	18,74
	5	50,05	31,24	29,02	29,34	26,81	26,09	25,88	24,85	26,10	25,67
T_{rs}	2	93,45	27,64	27,42	27,36	27,33	27,32				
	3	92,26	27,91	22,83	22,56	22,54	22,54				
	4	71,72	31,97	25,01	23,06	22,54	22,42	22,35	22,38	22,37	22,34
	5	96,93	33,61	30,71	26,45	24,38	22,44	21,45	21,19	21,06	21,00

- Ecart quadratique moyen eq %

Sortie	Degré n	Passage n°									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_v	2	22,24	8,09	8,01	7,99	7,98	7,98				
	3	19,62	7,85	7,64	7,60	7,60	7,59				
	4	13,45	8,46	7,96	7,75	7,66	7,59	7,59	7,58	7,58	7,58
	5	25,06	12,04	9,69	7,98	7,94	7,09	6,93	6,78	6,71	6,68
T_s	2	39,55	17,42	16,64	16,37	16,25	16,19				
	3	27,29	17,28	13,71	13,19	13,09	13,02				
	4	21,62	16,85	17,62	13,33	11,95	11,01	10,83	10,72	10,82	10,92
	5	29,16	18,20	16,91	17,10	15,62	15,20	15,08	14,48	15,21	14,96
T_{rs}	2	53,41	13,01	12,91	12,88	12,87	12,86				
	3	48,14	13,14	10,75	10,62	10,61	10,61				
	4	33,76	15,05	11,77	10,86	10,61	10,55	10,52	10,54	10,53	10,52
	5	45,63	16,76	14,46	12,45	11,47	10,57	10,10	9,97	9,92	9,89

On notera, dans les tableaux ci-dessus, que pour un même essai les écarts-types de e_k et e_k^* sont toujours très voisins, indiquant ainsi un bon fonctionnement du filtre secondaire d'estimation des variances.

On observera, d'autre part, que la convergence du filtre demande beaucoup plus de passages pour un modèle d'ordre élevé. En effet, plus le nombre de paramètres à identifier est élevé, et plus l'enregistrement doit être long. Un modèle d'ordre 5, par exemple, (31 coefficients) nécessite 8 à 10 passages.

On remarquera aussi sur les figures (V-13), (V-14) et (V-15) que, comme on pouvait s'y attendre, le modèle suit d'autant mieux que le nombre de paramètres est important. En effet, l'écart quadratique moyen décroît lorsque n croît et ceci bien qu'il n'y ait pas de minimisation explicite. Cependant, les réponses indicielles de chaque modèle sont pratiquement superposables (voir figure V-16) quel que soit l'ordre n , et on peut conclure qu'en pratique il sera souvent inutile de choisir un modèle d'ordre élevé (jamais supérieur à 3 ou 4) sous prétexte de gagner quelques centièmes sur le critère d'écart.

3-5) Conclusion

On se propose, ici, d'identifier les systèmes multi-entrées, mono-sortie, sous la forme de transmittances discrètes. Le programme général que nous avons écrit est valable pour un degré du dénominateur commun quelconque et pour un nombre d'entrées quelconque. Nous avons adopté une représentation d'état qui conduit à une programmation et à une initialisation du filtre la plus simple possible. En effet, nous n'introduisons aucune composante supplémentaire sur l'état généralisé, le nombre d'appels aux sous-programmes est strictement minimum, l'initialisation de l'état proprement dit ne fait appel qu'à la variance du bruit de sortie, et nous adoptons pour les paramètres une initialisation standard. Le programme peut donc être exploité très facilement, même par des personnes non familiarisées avec les problèmes de filtrage. Ce programme qui sera utilisé pour l'identification de la Tranche 5 de la Centrale Thermique de Nantes-Cheviré (voir chapitre VI) a été testé sur un enregistrement effectué sur une chaudière de la Centrale E.D.F. de Pont sur Sambre (Cas test B élaboré par J. RICHALET pour le 3ème Symposium IFAC de La Haye). En effet, nous avons réalisé sur ce même enregistrement une série d'essais systématiques qui nous ont permis de déterminer tout d'abord une relation expérimentale assez approximative entre la longueur d'enregistrement et le nombre de paramètres à identifier, et, d'autre part, le gain que l'on pouvait raisonnablement espérer sur l'écart quadratique moyen en augmentant l'ordre du système.

Notons, enfin, qu'une méthode différente (approximation minimale) donne des résultats tout-à-fait comparables, aussi bien sur les réponses indicielles que sur les écarts (cf. BARRAUD |5|).

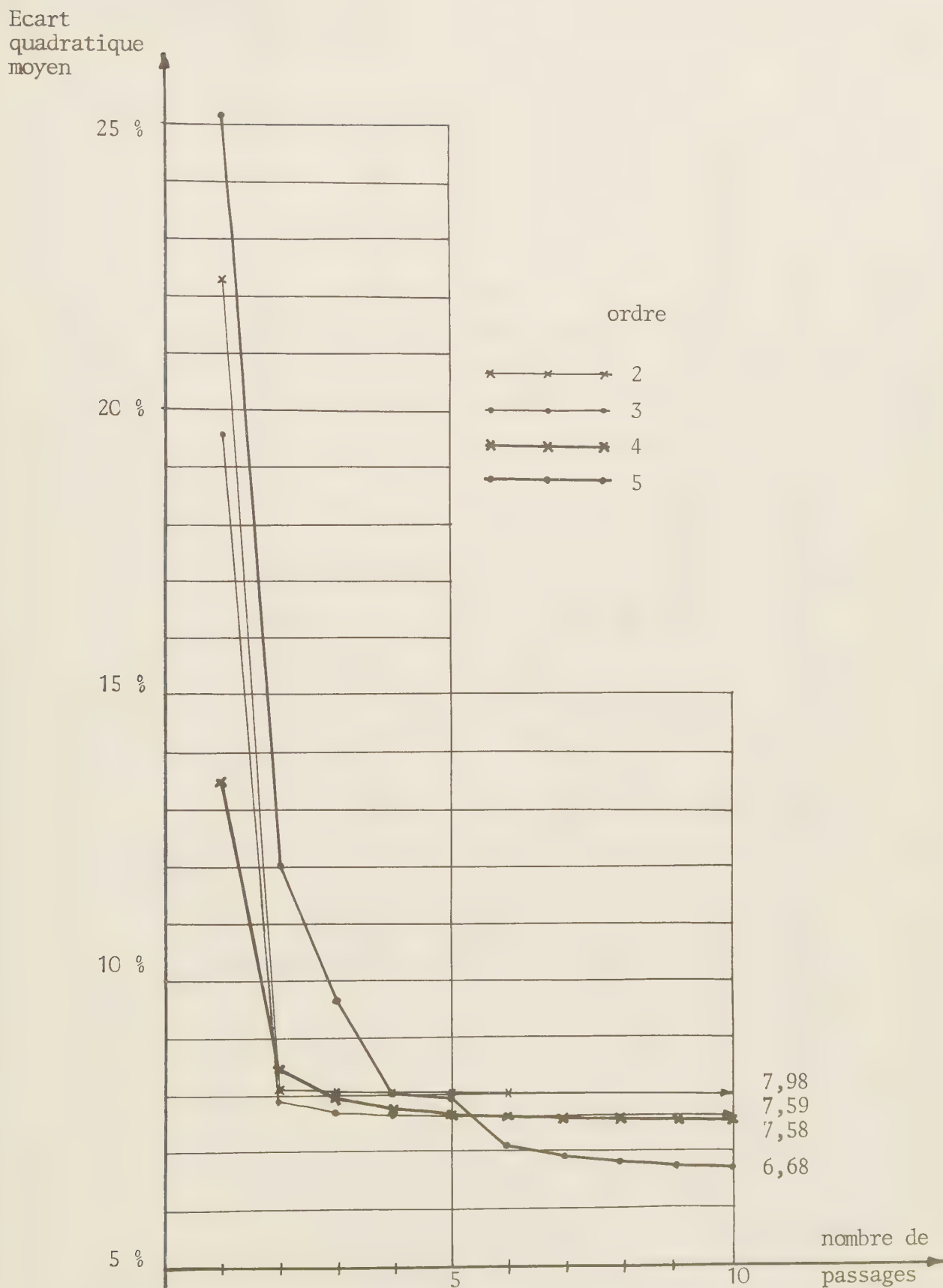


Fig. V-13 - Sortie PV

Evolution de l'écart quadratique moyen
en fonction du nombre d'itérations.

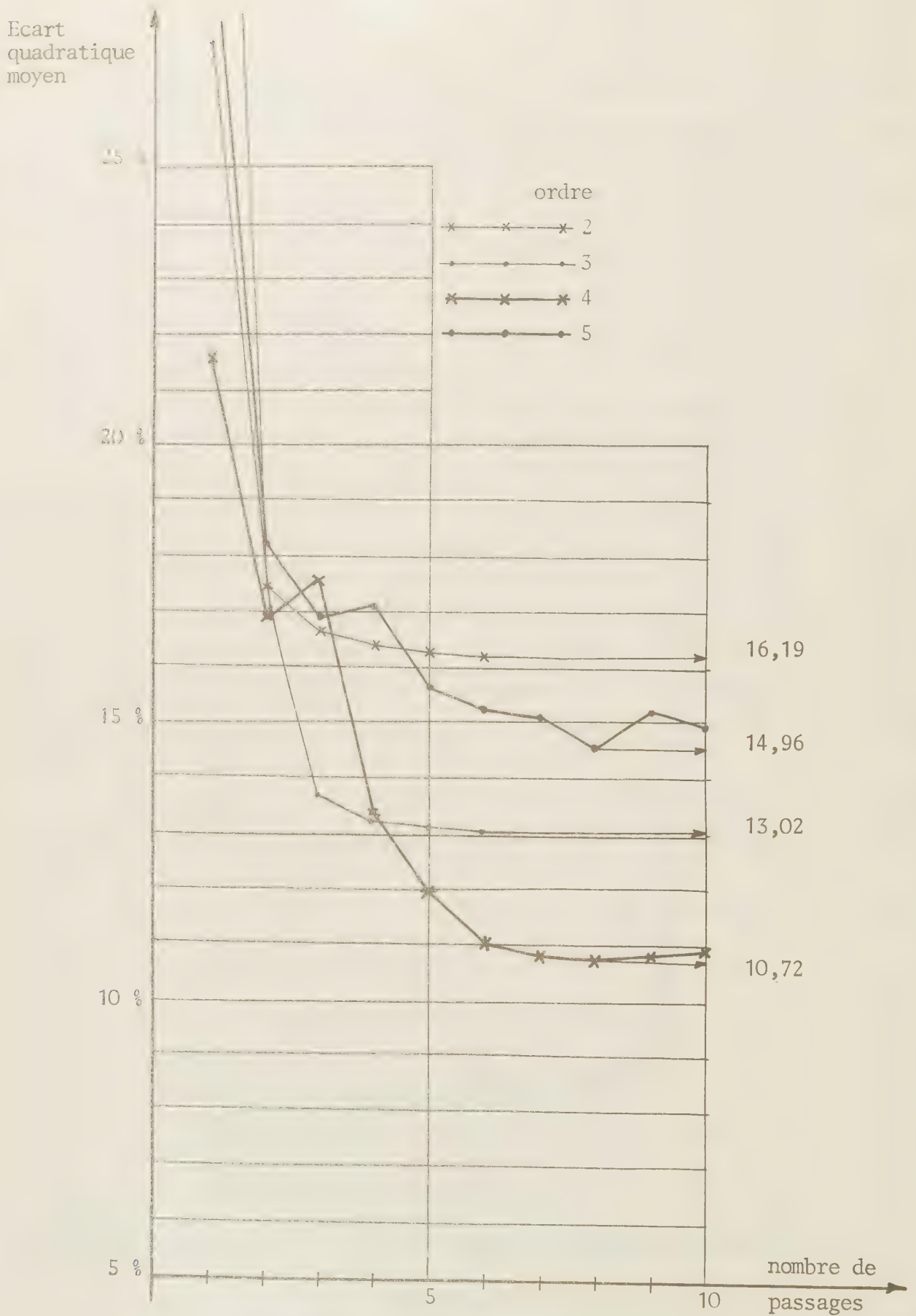


Fig. V-14 - Sortie TS
Evolution de l'écart quadratique moyen
en fonction du nombre d'itérations.

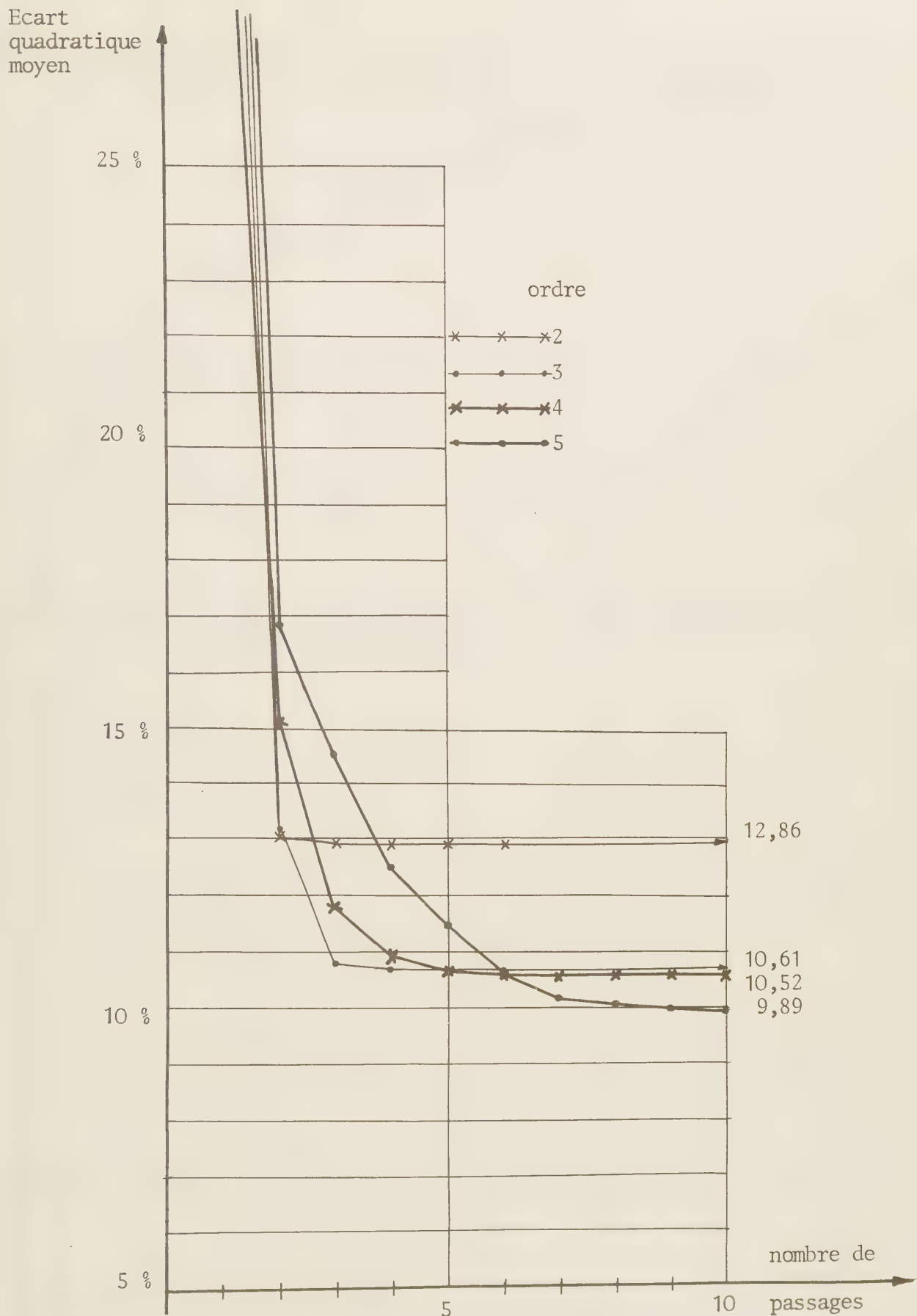


Fig. V-15 - Sortie TRS
Evolution de l'écart quadratique moyen
en fonction du nombre d'itérations.

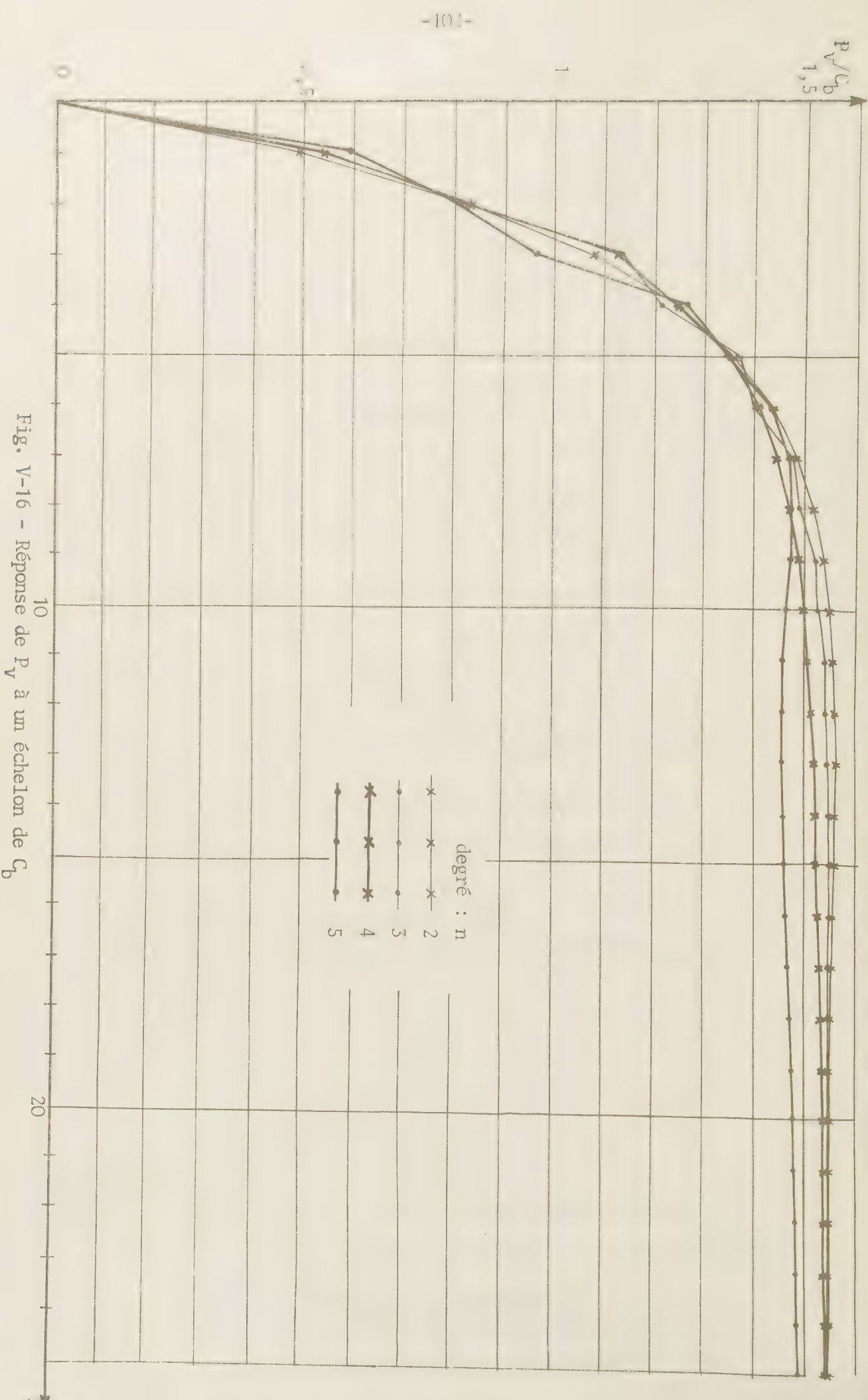


Fig. V-16 - Réponse de P_V à un échelon de C_b

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | Ph. De LARMINAT, Y. THOMAS
"Etude d'une régulation optimale"
Rapport D.G.R.S.T. 68.01.409 - juin 1970.

- | 2 | J.M. PIASCO
"Application de l'identification par filtrage non linéaire sous-optimal"
D.E.A. Automatique - Nantes - octobre 1971.

- | 3 | G. COEURDEUIL
"Contribution à l'étude des systèmes commandés hiérarchiquement et application à un générateur de vapeur"
Thèse de Docteur-Ingénieur - Nantes - juin 1975.

- | 4 | J. RICHALET
"Test-cases B"
3rd IFAC Symposium. Identification and System Parameter Estimation -
La Haye - juin 1973.

- | 5 | A. BARRAUD, Ph. De LARMINAT
"Minimal realisation and approximation of linear systems from normal operating records"
3rd IFAC Symposium - La Haye - juin 1973.

Chapitre VI

IDENTIFICATION DES CHAINES DE PRESSION ET DE TEMPERATURE DE LA TRANCHE 5 DE LA CENTRALE DE NANTES-CHEVIRE

- 1 - DESCRIPTION DE L'INSTALLATION
- 2 - LE SYSTEME INFORMATIQUE
- 3 - MODELISATION DE L'INSTALLATION
- 4 - LES SIGNAUX D'EXCITATION ET LES ENREGISTREMENTS
- 5 - IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE
- 6 - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous exposons les travaux concernant l'identification des chaînes de pression de température de surchauffe et de resurchauffe de la tranche 5 de la Centrale Thermique de Nantes-Cheviré [13] , [14] , [15].

Le filtrage non linéaire passe ici au second plan et nous utilisons le programme multi-entrée, mono-sortie décrit au chapitre précédent uniquement pour identifier des sous-systèmes, ce qui n'est qu'une étape intermédiaire dans la recherche du modèle. Par contre, nous insistons davantage sur les problèmes annexes de l'identification, tels que l'acquisition des différentes grandeurs physiques, la modélisation du processus et le choix des signaux d'excitation par exemple.

Le système informatique, installé par la CERC I a permis d'effectuer une partie de l'identification sur le site (calculateur Télémécanique T2000/20 : 24 K mots de 20 bits) ; cependant la majeure partie des enregistrements a été traité au Centre de Calcul Universitaire (IBM 370/135).

Des essais en boucles fermées avec excitation des points de consignes ou avec injection de signaux binaires dans les chaînes de régulation ont permis d'établir un modèle dont la structure est déduite directement de la physique de la tranche. Ce modèle présente ainsi l'avantage de donner un sens précis aux divers coefficients et permet d'autre part, d'adopter des algorithmes de commande relativement simples (la reconstruction de l'état se révélant particulièrement aisée).

Un modèle obtenu par une méthode totalement différente (réalisation minimale) présentant des réponses tout à fait comparables d'une part, et des performances de commande sur site conforme à la théorie et aux résultats obtenus en simulation d'autre part, ont permis de valider le modèle trouvé.

1 - DESCRIPTION DE L'INSTALLATION

La tranche 5 de la Centrale de Nantes-Cheviré d'une puissance de 250 MW est un ensemble autonome comprenant trois installations principales :

- un générateur de vapeur
- un groupe turbo-alternateur
- un transformateur

Le générateur de vapeur construit par "Fives Penhoët", alimenté au fuel, a les caractéristiques suivantes :

Débit de vaporisation	735 t/h
Température de la vapeur surchauffée	565°C
Température de la vapeur resurchauffée	565°C
Pression de la vapeur surchauffée	165 bars
Pression de la vapeur resurchauffée	35 bars

La vapeur fournie par la chaudière se détend dans les différents étages des parties haute, moyenne et basse pression de la turbine. En fin de détente, la vapeur est refroidie dans un condenseur alimenté par l'eau de la Loire. Avant d'alimenter à nouveau le générateur de vapeur, l'eau condensée est réchauffée progressivement dans des resurchauffeurs utilisant de la vapeur soutirée en différents points de la turbine.

L'alternateur entraîné par la turbine (groupe "C.E.M." de 250 MW) à la vitesse de 3 000 t/min fournit l'énergie électrique au transformateur qui porte sa tension de 20 000 V à 220 000 V.

Sur cette installation, nous nous sommes intéressés au circuit de vapeur. Le schéma simplifié de la Fig. (VI-1) nous en donne le trajet dans les différents surchauffeurs et resurchauffeurs et les trois étages de la turbine.

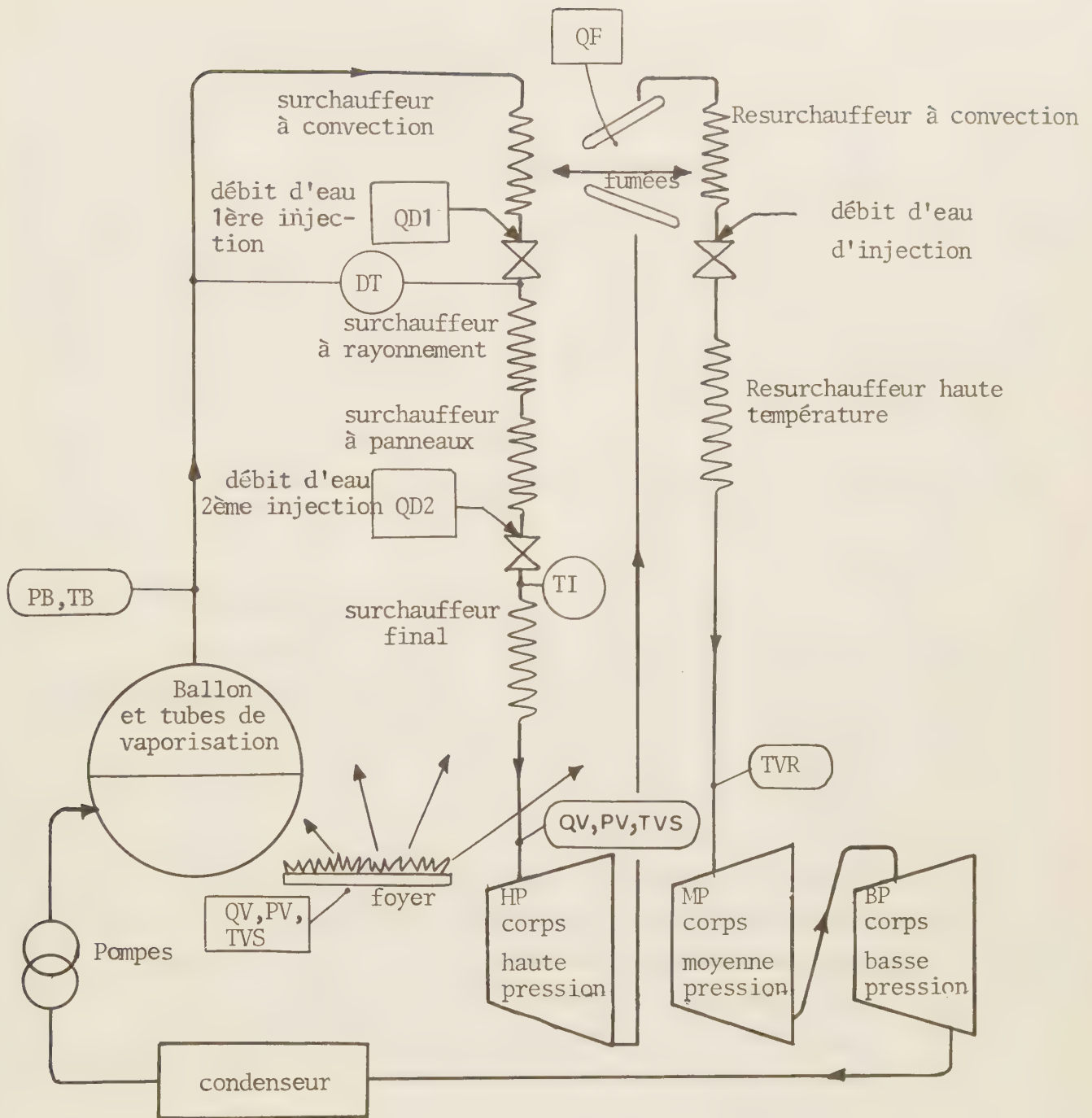


Fig. VI-1 Schéma de principe du circuit de vapeur

Le problème de régulation concerne un système à trois sorties à contrôler

PV : Pression de vapeur surchauffée à l'admission du corps HP

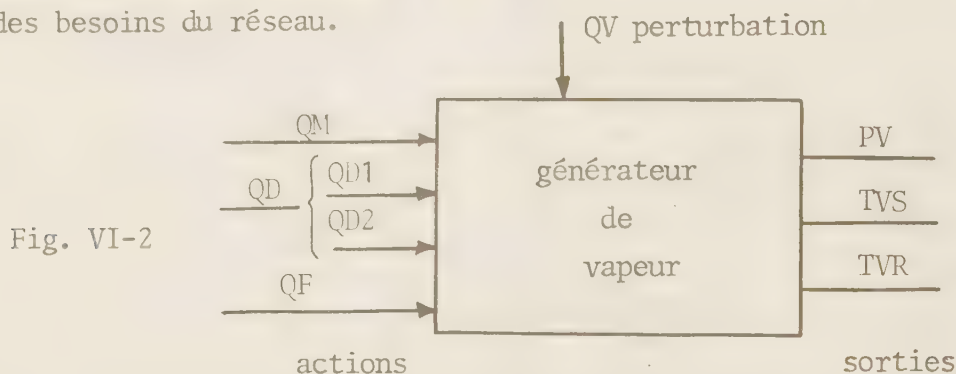
TVS : Température de vapeur surchauffée à l'admission du corps HP

TVR : Température de vapeur resurchauffée à l'admission du corps MP

les grandeurs d'action que nous considérons sont :

- QM : le débit de mazout (en réalité le couple QM,QA)
- QD1 : le débit d'eau de première injection
- QD2 : le débit d'eau de deuxième injection
- QF : le débit des fumées

La perturbation principale est le débit de vapeur QV à l'admission du corps haute pression : QV dépend essentiellement des variations de l'ouverture soupape elle-même commandée par la puissance demandée à la tranche en fonction des besoins du réseau.



On dispose en outre de divers points de mesures complémentaires

- PVC : Consigne de pression vapeur
- CQM : Commande du débit mazout
- PB : Pression de vapeur au ballon
- TVSC : Consigne de température de surchauffe
- TI {
 - TID : Température intermédiaire droite de surchauffe
 - TIG : Température intermédiaire gauche de surchauffe
- CQD1 : Commande du débit d'eau de première injection
- CQD2 : Commande du débit d'eau de deuxième injection
- DTD : Ecart de température entre le ballon et l'entrée du surchauffeur à rayonnement droit
- DTG : Ecart de température entre le ballon et l'entrée du surchauffeur à rayonnement gauche
- QV : Débit de vapeur à l'entrée de la turbine
- TB : Température ballon
- TVRC : Consigne de température de résurchauffe
- CQF : Commande du débit des fumées de resurchauffe
- W : Puissance du groupe turbo-alternateur

Afin de bien préciser les actions, les grandeurs mesurées et les différents modes de fonctionnement, nous allons détailler les 3 chaînes de régulation principales |1|, |3|.

1-1) La chaîne de pression vapeur (diagramme simplifié)

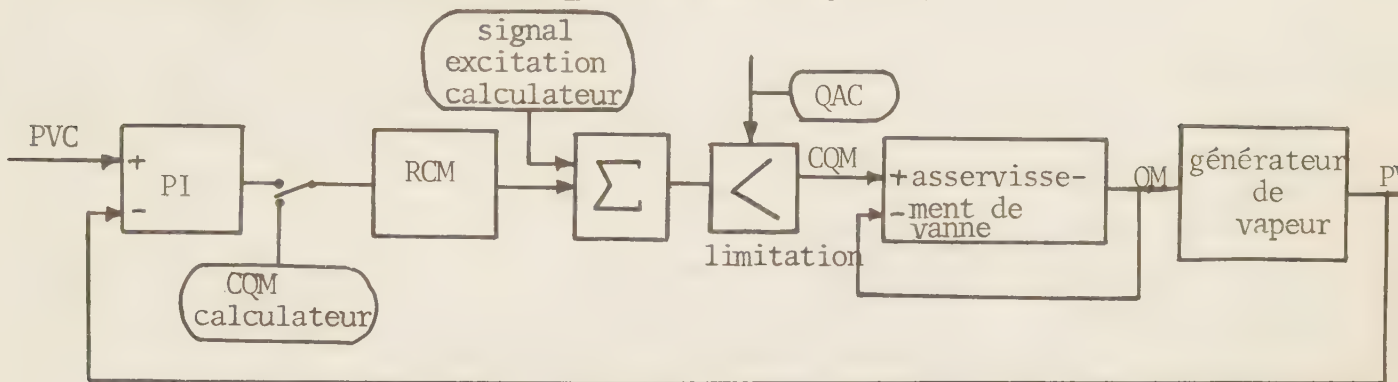


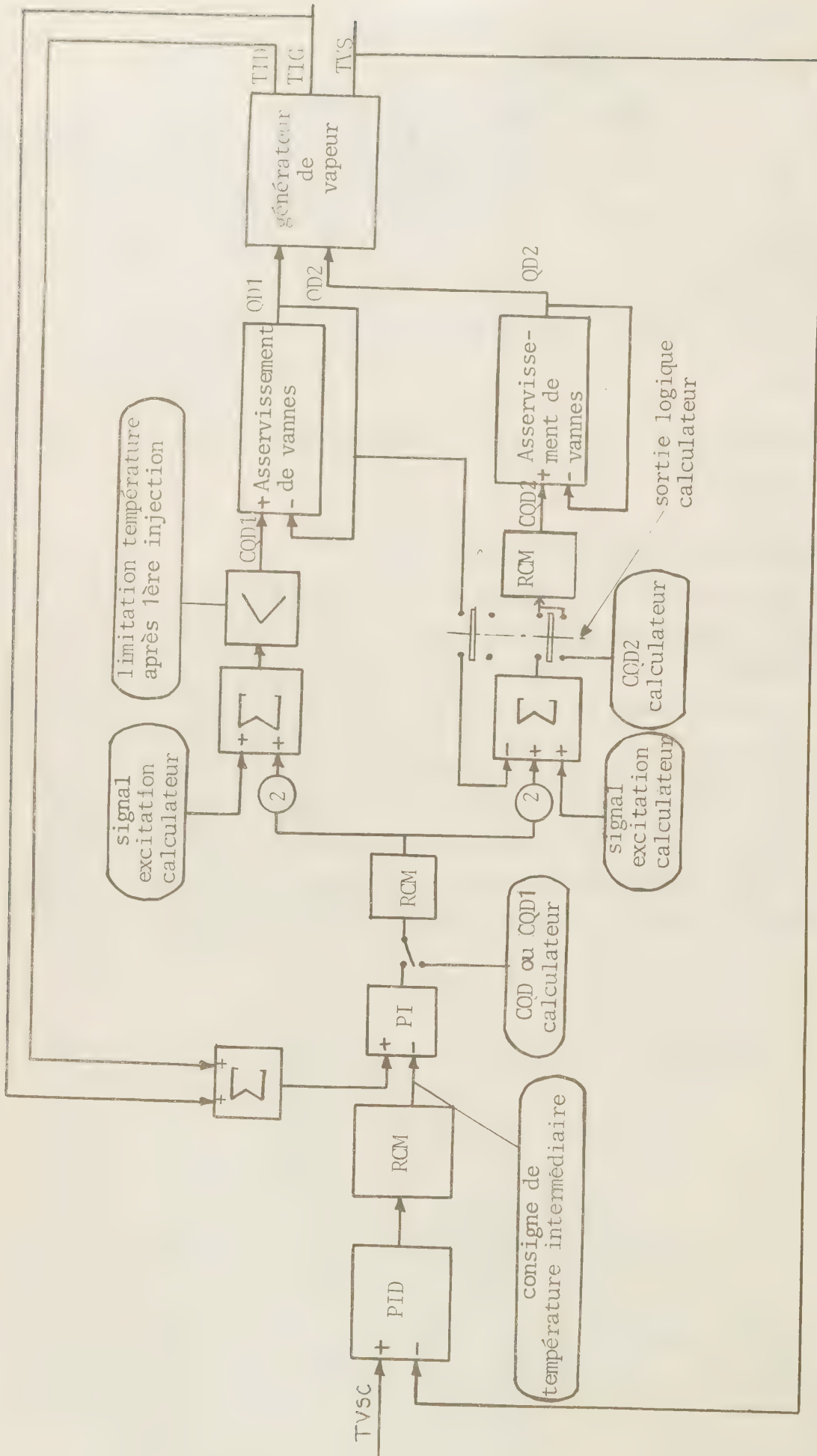
Fig. VI-3

RCM : Relais de commande à main

Un régulateur à action proportionnelle et intégrale élabore la consigne de débit mazout CQM.

1-2) Chaîne de température de surchauffe (Fig. VI-4)

La chaîne de surchauffe comporte une régulation cascade. A partir de l'écart entre la température finale de surchauffe TVS et sa consigne TVSC, le régulateur principal PID élabore une consigne de température intermédiaire. L'écart entre cette consigne et la mesure de température intermédiaire est alors appliqué au régulateur PI qui calcule une commande générale d'injection de désurchauffe. Ce signal est ensuite réparti entre les deux consignes d'asservissement de débit CQD1 et CQD2 de telle sorte que le réglage soit assuré en priorité par la 1ère injection, la deuxième n'intervenant que lorsque l'écart entre la température après 1ère injection et la température ballon (DTD et DTG) devient inférieur à 30°C, ou lorsque la première injection est en saturation.



RCM : Relais de commande à main

Fig. VI-4 Chaîne de température de surchauffe (diagramme simplifié)

1-3) La chaîne de température de resurchauffe (diagramme simplifié)

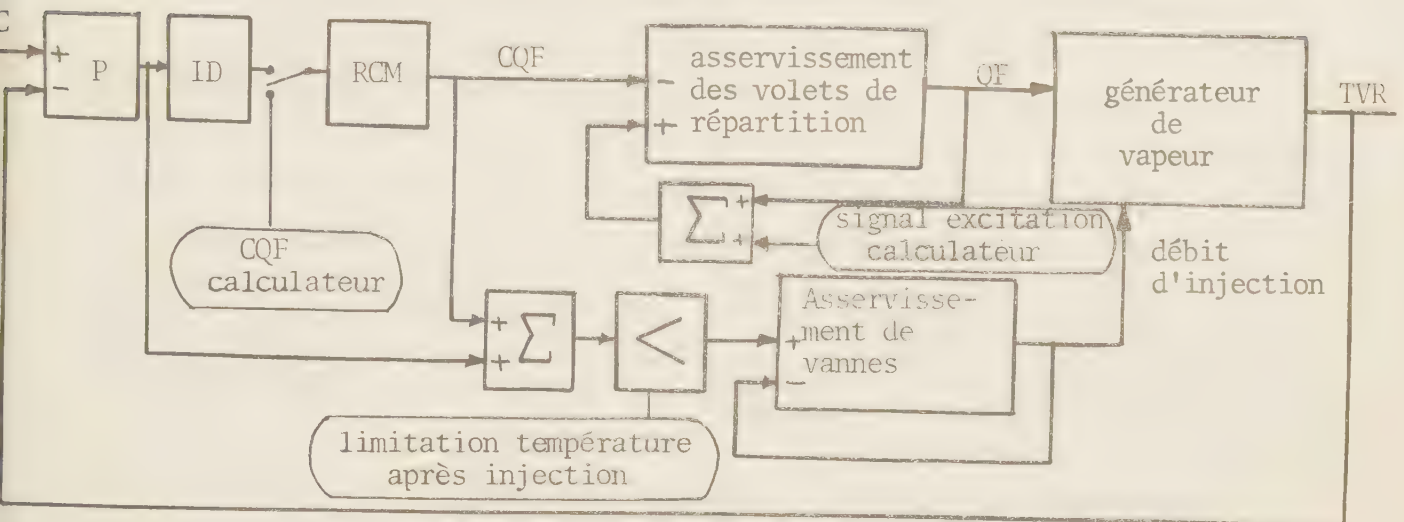


Fig. VI-5

RCM : Relais de commande à main

L'écart entre la température finale de resurchauffe et sa consigne détermine à travers un régulateur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée, la consigne du débit des fumées.

Lorsque l'écart TVR - 565°C devient trop important, un débit d'eau est injecté à la sortie du résurchauffeur primaire.

Cette action n'étant pas prise en compte, il est alors nécessaire pour l'identification de mettre en "manuel" les 2 relais de commande à main des vannes pour éviter des perturbations accidentelles dont l'influence serait non négligeable.

2 - LE SYSTEME INFORMATIQUE

Le système T2000/20 installé par C.E.R.C.I. [6], [7] à Nantes-Cheviré présente la configuration suivante :

- une mémoire centrale de 24 K mots de 20 bits
- un disque de 256 K mots
- une chaîne d'acquisition analogique de 30 voies
- des entrées et sorties Tout ou Rien (19 et 24)
- une teletype
- un lecteur de ruban rapide
- un perforateur de ruban rapide
- quatre voies analogiques de sortie.

Deux grands systèmes ont été implantés en machine : le système "temps réel" et le système "centre de calcul" [6] , [7].

Deux fonctions "temps réel" importantes sont utilisées pour l'identification :

REC : recueil de données sur disque

PRB : génération de signaux destinés à exciter l'installation

Bien sûr un ensemble d'autres fonctions générales peut être utilisé simultanément pour dialoguer avec le calculateur, pour lire ou modifier un quelconque des paramètres du programme temps réel.

2-1) Acquisition des mesures et rangement sur disque :

La période de scrutation des voies analogiques a été fixée à 5 secondes (modifiable hors ligne). On doit avant de lancer le recueil indiquer par dialogue à la teletype si l'on veut stocker une valeur moyenne sur plusieurs scrutations ou non (dans l'affirmative sur combien) et quelles sont les voies que l'on désire enregistrer. Le rangement des mesures sur le disque se fait à partir d'une adresse modifiable en ligne et permet de pouvoir faire plusieurs essais consécutifs sans détruire les précédents. 160 K mots sont réservés à ces acquisitions et correspondent à 7 heures d'enregistrement ininterrompu des 30 voies pour une période de 5 secondes.

2-2) Traitement des mesures sur le site :

Le programme FORTRAN d'identification de système multi-entrées mono-sortie, par filtrage non linéaire (voir Chapitre V, paragraphe 3), a été implanté en machine. Il fonctionne en différé lorsque le calculateur fonctionne en "Centre de Calcul" sous le contrôle du processeur D.M.S. (Disque Moniteur Système). Il permet un traitement immédiat des mesures après chaque acquisition. Son volume mémoire est de 15 K mots de 20 bits.

2-3) Le déchargement du disque :

Il s'effectue aussi sous le contrôle du processeur D.M.S. Le programme de déchargement permet de perforer sur ruban papier le contenu du disque correspondant à une acquisition. Les sorties se font par bloc de 11 K mots, chaque bloc donnant un volume de ruban de manipulation aisée.

Ce ruban est ensuite converti après décodage en bande magnétique pour un traitement ultérieur sur gros calculateur (IBM 370/135 du centre de calcul universitaire).

2-4) Génération de signaux d'excitation :

L'excitation de l'installation peut être soit "manuelle" par action sur les points de consigne des régulateurs, soit élaborée par le calculateur. Dans ce dernier cas, les signaux employés sont des séquences binaires pseudo aléatoires de valeurs moyennes nulles et sont injectés dans les chaînes de régulation analogiques (voir les diagrammes simplifiés au paragraphe 1). Ceci est destiné à avoir des commandes qui soient relativement bien décorrélées pour permettre d'identifier le système par rapport à toutes ses entrées. Les signaux issus des 4 voies de sorties du calculateur sont envoyés par un système de relayage sur les sommateurs appropriés de la régulation analogique.

Les caractéristiques des séquences binaires (nombre d'étage, état initial, amplitude, période) sont choisies par dialogue à la teletype et sont à tout moment modifiables en ligne.

Pour ne pas trop perturber l'installation, on peut passer d'un niveau binaire à un autre par l'intermédiaire d'une rampe de pente donnée modifiable en ligne (ceci est obligatoire pour la commande de mazout CQM).

3 - MODELISATION DE L'INSTALLATION

3-1) Définition des entrées-sorties :

Le système à étudier comporte 3 sorties, 3 entrées et une perturbation mesurée :

PV : Pression de vapeur de sortie	}	sorties
TVS : Température de vapeur surchauffée		
TVR : Température de vapeur resurchauffée		
CQM : Consigne de débit mazout	}	entrées
CQD CQD1 CQD2 Consignes des débits d'injection d'eau		
CQF : Consigne de débit de fumée		
QV : Débit de vapeur de sortie	}	perturbation

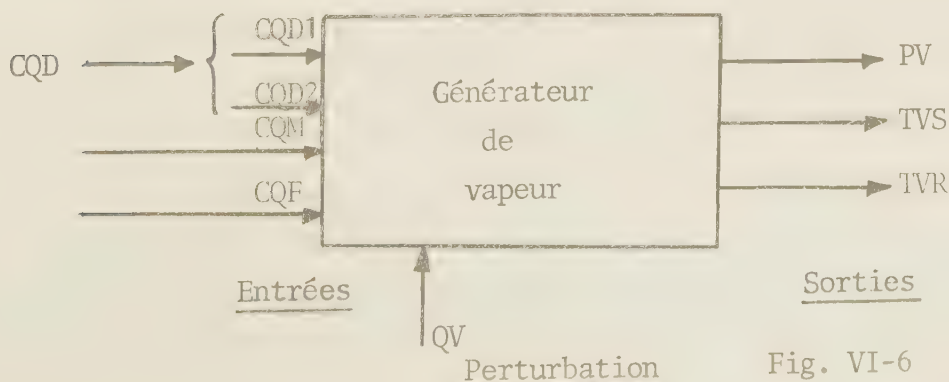


Fig. VI-6

Remarque : On envisage ici le cas d'une seule commande globale de désurchauffe CQD la régulation analogique se chargeant de la répartir entre les deux commandes CQD1 et CQD2 comme il a été dit au paragraphe 1.

3-2) Modèle déduit de la physique du système : |8|

Nous avons ici construit un modèle qui nous permet de faire apparaître des "blocs" traduisant le fonctionnement des principaux organes de la chaudière (voir le schéma du circuit de la vapeur Fig. VI-1).

Nous représenterons donc un modèle de la pression par le diagramme suivant :

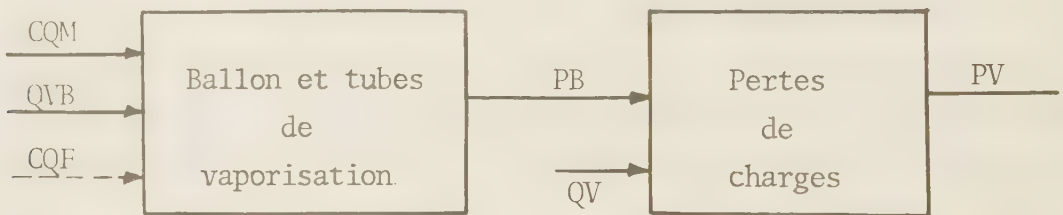


Fig. VI-7

QVB représente le débit de vapeur sortant du ballon, QV le débit de vapeur en sortie : $QV = QVB + QD1 + QD2$ (T/h).

CQF agit de manière insignifiante sur la pression et après identification cette action a été négligée.

Le 2ème bloc représente les pertes de charge entre le ballon et la turbine ; pertes que nous supposerons sans dynamique.

Le modèle de température se traduit par le diagramme suivant :

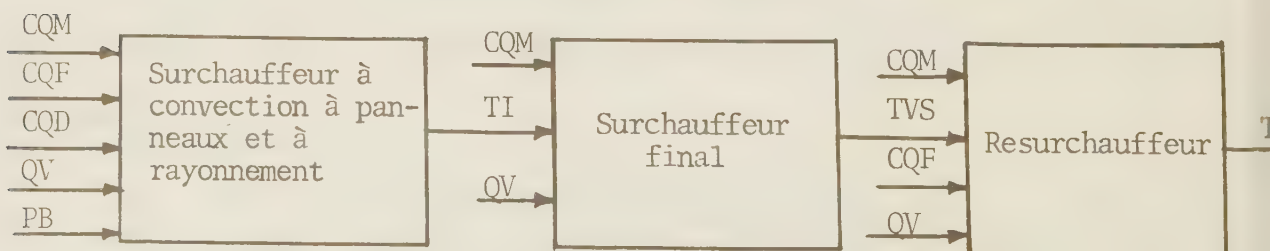
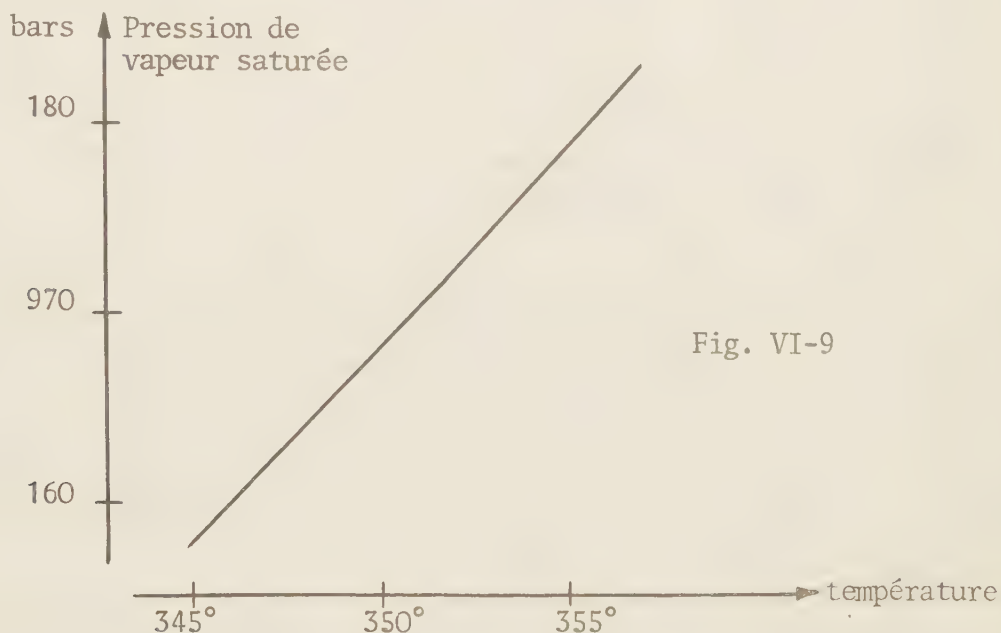


Fig. VI-8

On remarquera que ce deuxième diagramme traduit l'évolution de la température de la vapeur lorsque celle-ci parcourt l'ensemble des surchauffeurs et resurchauffeurs. On notera en particulier que la consigne de débit des fumées CQF n'intervient pas sur le bloc intermédiaire car les fumées agissent unique-

ment sur les surchauffeurs et resurchauffeurs à convection (en fait peut être une action, mais pas mise en évidence).

D'autre part, il semble à première vue artificiel de voir apparaître comme entrée du premier bloc PB et non pas TB, température à l'entrée du premier surchauffeur. Cependant, si l'on considère que la vapeur au ballon est saturée il existe une relation entre pression et température (voir Fig. VI-9). Dans la plage de fonctionnement utilisée, nous considérerons que cette relation est linéaire. Le modèle de pression nous fournissant PB, il est donc inutile de construire un bloc donnant TB.



Les relations traduisant la transmission de la chaleur (conduction, convection, rayonnement) et les échangeurs de chaleur conduisent à des systèmes à paramètres répartis très complexes et difficilement exploitables.

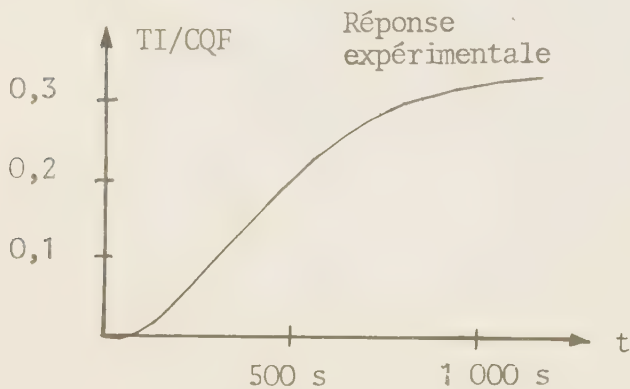
Nous avons donc rejeté a priori la modélisation microscopique des différents organes de la chaudière et nous avons essayé à partir de considérations physiques élémentaires de déterminer un modèle linéaire le plus simple possible susceptible de reproduire assez fidèlement les réponses transitoires de l'installation.

L'observation des réponses indicielles expérimentales obtenues lors d'un fonctionnement en asservissement d'ouverture soupape (mai 1973) nous a permis après simulation sur calculateur analogique (EAI TR 48) d'adopter le modèle de la figure (VI-11).

En effet, un raisonnement élémentaire sur la forme des réponses (non oscillatoires, avec tangentes à l'origine nulles ou non, à minimum de

phase, etc...) nous autorise à adopter comme fonctions de transfert entre les commandes et les sorties des premiers ou des seconds degrés à pôles réels.

Exemple : Réponse de la température intermédiaire à un échelon de consigne des carneaux.



Une fonction de transfert du type

$$\frac{TI(p)}{CQF(p)} = \frac{KI_F}{(1+\tau_F p)(1+\tau_I p)}$$

semble ici parfaitement adaptée.

Fig. VI-10

Pour simplifier encore le modèle, nous avons aussi supposé que certaines constantes de temps étaient communes. On peut justifier ceci par exemple pour la constante de temps τ_F qui représente grossièrement les phénomènes d'échanges de chaleur au surchauffeur et au resurchauffeur à convection. Il ne faudrait pas toutefois rechercher une signification physique rigoureuse et nous préférons nous attacher plutôt aux diverses formes de réponses transitoires à des actions sur les diverses grandeurs de commande.

Nous choisirons toujours de déterminer les gains statiques en volt/volt mais il est facile de revenir aux unités physiques en se reportant au tableau de conversion suivant :

grandeurs	0	-	10 volts
TI, TVS, TVR	300	-	600°C
CQD	0	-	60 T/h
CQM	0	-	70 T/h
CQF	0	-	100 %
QV	0	-	800 T/h
PS, PB	0	-	200 bars

Ainsi, la relation approchée $QV = QVB + CQD$ exprimée en T/h devient $QV = QVB + 0,075 CQD$ exprimée en volts, relation qui nous permet de construire QVB à partir de QV et CQD sur le diagramme (VI-11).

On notera que les constantes de temps τ_M , τ_D , τ_F ne traduisent pas uniquement les dynamiques des asservissements des débits de mazout de désur-

chauffe et des fumées mais qu'elles tiennent compte de retards qui peuvent être dus aux échanges thermiques dans les surchauffeurs ou au ballon par exemple.

C'est ainsi que les grandeurs XQM, XQD, XQF n'ont pas de signification physique, elles traduisent simplement le fait que nous avons choisi pour fonctions de transfert entre TI et CQF ou entre CQM et TVR par exemple des deuxièmes ordres.

La perte de charge entre la pression au ballon PB et la pression à l'entrée de la turbine PV est du type $PV = PB - a QV^2$. Nous l'avons remplacé dans le domaine de fonctionnement envisagé par la relation linéaire $PV = PB - \alpha QV + \beta$.

Les grandeurs V_1, V_2, V_3, V_4 sont des constantes qui tiennent compte d'une part des échelles choisies (0 - 10 volts pour 300°-600° pour les températures) et d'autre part du point de fonctionnement envisagé.

Ce modèle présente plusieurs avantages :

Pour l'identification, il permet d'identifier le générateur de vapeur par blocs et de donner un sens précis aux divers coefficients.

Pour la commande, son ordre faible ($n = 7$) conduit à des algorithmes relativement simples et la reconstruction de l'état se révèle particulièrement aisée. En effet, seuls les états XQM, XDQ, XQF seront reconstruits, les autres états PV, TI, TVS, TVR étant eux directement mesurés.

Remarque : Nous avons fait au début du paragraphe l'hypothèse que la relation entre la température TB et la pression PB était linéaire :

$$TB = a PB + b$$

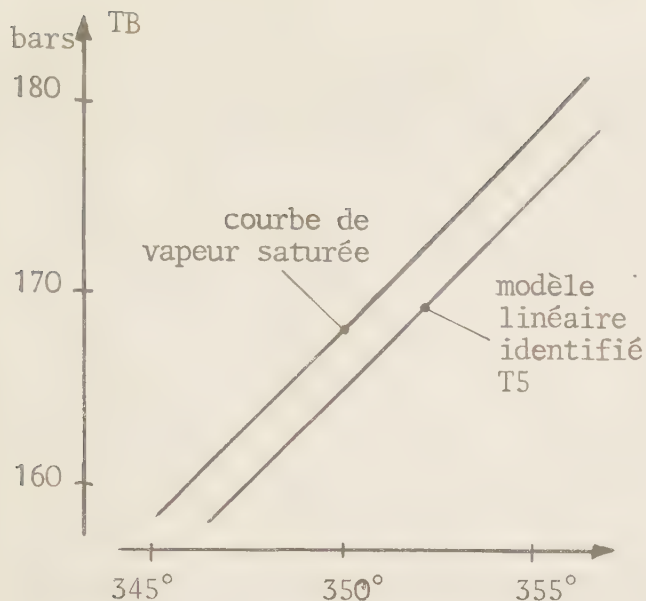
L'estimation des coefficients a et b peut se faire facilement par filtrage linéaire et conduit à la relation :

$$TB = 0,50502 PB + 0,82498$$

ceci pour l'essai du 30 septembre 1974 (n°8).

L'erreur quadratique moyenne étant de 29,5 %, soit 0,01 V (2°C).

On peut comparer sur un graphe $TB = f(PB)$ la relation donnée par la thermodynamique et la relation "identifiée" :



Les deux courbes sont décalées l'une par rapport à l'autre mais leurs pentes sont sensiblement identiques.

L'hypothèse de linéarité se trouve donc vérifiée expérimentalement avec une assez bonne précision.

Fig. VI-12

4 - LES SIGNAUX D'EXCITATION ET LES ENREGISTREMENTS

L'installation restant en exploitation pendant les essais, il n'est pas question de passer toutes les chaînes en boucle ouverte. Il est donc impossible d'exciter successivement chaque commande les autres étant maintenues constantes. [3]

Deux types d'excitation ont été utilisés.

4-1) Excitation par action sur les points de consignes ou sur certaines commandes (chaînes en boucle ouverte) :

On modifie successivement les consignes de pression et de température PVC, TVSC, TVRC ainsi que la demande de charge W.

Toutefois, on ouvre la chaîne de régulation de la température de surchauffe pour pouvoir agir indépendamment sur chacune des deux injections (durée 30 à 45 mn).

Pour pouvoir valider le modèle obtenu par les essais en boucle fermée, nous disposons de deux enregistrements où les chaînes de température de surchauffe TVS et de resurchauffe TVR sont en boucle ouverte.

Les variations utilisées sont soit des crénaux, soit des rampes assez rapides d'amplitude 9°C (0,3 V) sur les températures et 4 bars (0,2 V) sur la pression et lorsque les chaînes de températures sont ouvertes 6 T/h (1 V) sur les injections et 10 % (1 V) sur la position des carneaux. Les variations de charge étant soit celles demandées par le télé réglage, soit des crénaux d'environ 10 MW.

4-2) Excitation par injection de signaux binaires dans les chaînes de régulation :

Ces signaux, élaborés par le calculateur sont superposés aux signaux issus des régulateurs pour donner les commandes à appliquer à l'installation comme le montre la figure ci-dessous.

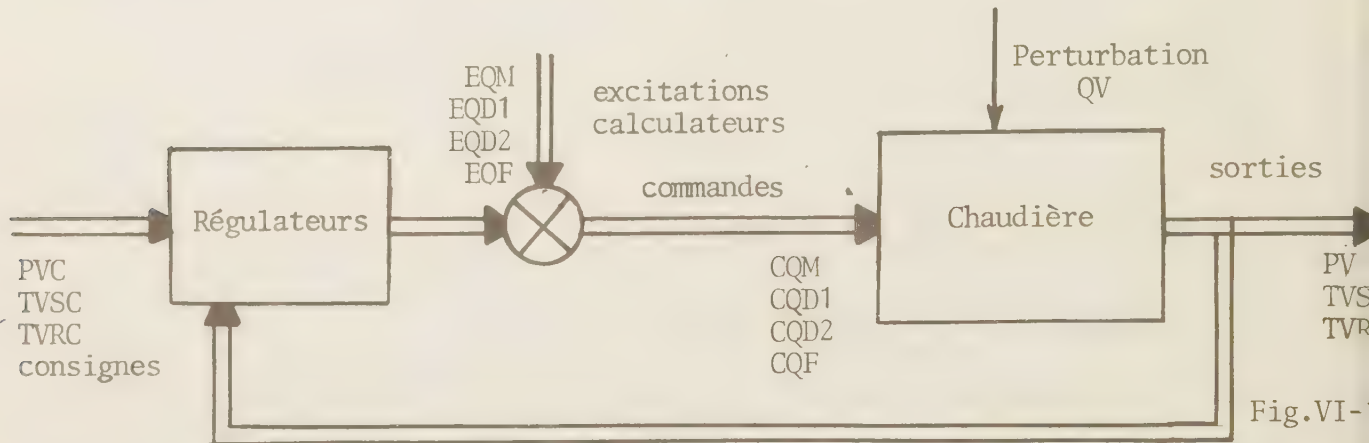


Fig.VI-

Les signaux d'excitation doivent être indépendants. Nous avons choisi 4 signaux binaires pseudo-aléatoires (PRBS) de même période (512) mais décalés chacun de 1/4 de période.

Ces périodes de base choisies ont été 1 mm et 100 s et les amplitudes ont été les suivantes :

Pour EQM : de $\pm 0,12$ volt à $\pm 0,17$ volt ($\pm 0,84$ T/h à 1,19 T/h)

Pour EQD1 et EQD2 : de $\pm 0,4$ volt à $\pm 0,65$ volt ($\pm 2,4$ T/h à 3,9 T/h)

Pour EQF : $\pm 0,5$ volt (± 5 %)

Les contraintes d'exploitation interdisant de brusques variations sur le débit mazout, le passage d'un niveau à l'autre du signal binaire EQM se fait au moyen d'une rampe de 0,40 à 0,45 volt/mn comme le montrent les figures ci-dessous :

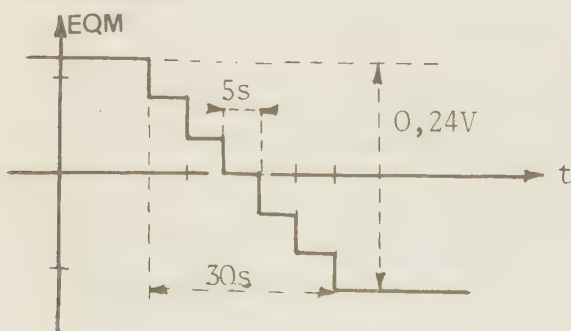
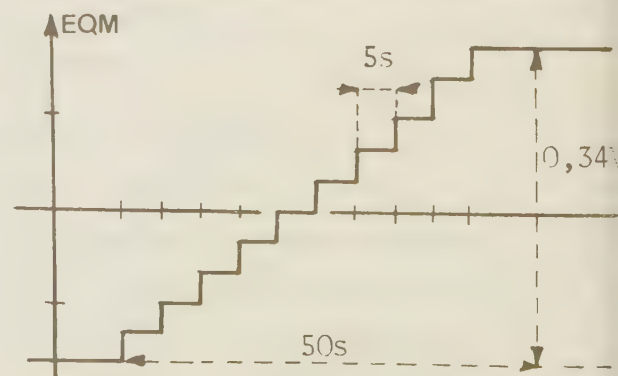


Fig.VI-14

exemple 1 : passage du niveau "1" au niveau "0" par 6 paliers intermédiaires.



exemple 2 : passage du niveau "0" au niveau "1" par 10 paliers intermédiaires.

Nous donnons dans le tableau récapitulatif suivant les caractéristiques de chacun des essais effectués.

Nous pouvons faire quelques commentaires généraux sur ces essais :

Les essais avec excitations par signaux binaires et variations de QV dues au téléréglage sont relativement "pauvres". Les régulations rattrapent presque instantanément les écarts des excitations calculateur et les sorties ne varient pratiquement pas autour de leurs valeurs de régime permanent. De tels essais sont insuffisants pour identifier correctement.

Les essais avec actions sur les consignes et variation du débit vapeur QV par le téléréglage (ou échelons de faible amplitude) sont tout juste suffisants. Un modèle vraisemblable a tout de même pu être élaboré et les algorithmes de commande utilisant ce premier modèle ont donné des résultats satisfaisants.

Pour faire disparaître les derniers doutes, deux essais où seule la pression était en boucle fermée ont été réalisés, les chaînes de température de surchauffe et de resurchauffe étant ouvertes. Les actions se font sur la consigne de pression (PVC) et sur les commandes d'injections et des carnaux (CQD¹, CQD2, CQF) et on dispose d'autre part de plusieurs créneaux consécutifs sur QV. Les résultats obtenus à partir de ces enregistrements sont d'emblée satisfaisants et confirment les précédents.

TABEAU RECAPITULATIF DES ESSAIS

n°	date	excitation PRBS	excitation points de consigne	durée	nombre de points	pas d'échant.	charge	observations
1	27 sept. 73		+	2 h 53 mn 35 s	2084	5 s	240 MW	échelon sur la charge de - 10 MW puis + 10 MW
2	18 oct. 73		+	3 h 44 mn 50 s	2699	5 s	240 MW	échelon sur la charge de - 10 MW puis + 10 MW
3	21 nov. 73		+	3 h 9 mn 20 s	2273	5 s	200 MW	charge à 220 MW - échelon de - 10 MW puis télé réglage autour de 190 MW (1 h 45 mn)
4	29 nov. 73		+	3 h 40 mn 0 s	2641	5 s	225 MW	charge à 235 MW puis télé réglage autour de 220 MW (1 h 30 mn)
5	20 déc. 73	+		5 h 45 mn 50 s	4151	5 s	210 MW	charge à 220 MW puis télé réglage autour de 210 MW (3 h)
6	26 fév. 74		+	3 h 55 mn 55 s	2832	5 s	210 MW	télé réglage uniquement
7	23 sept. 74		+	3 h 4 mn 35 s	2216	5 s	215 MW	charge à 220 MW puis 2 créneaux (-15 MW, + 15 MW) température surchauffe et resurchauffe en manuel 2 séries de mesures erratiques : 2 h utilisables
8	30 sept. 74		+	3 h 35 mn 25 s	2586	5 s	245 MW	charge à 245 MW - échelon de - 10 MW puis + 10 MW température surchauffe et resurchauffe en manuel.

5 - IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU MODELE

Ayant adopté le modèle décrit au paragraphe 3, il nous faut maintenant déterminer les paramètres de ce modèle. On pourrait envisager de les déterminer par une méthode directe, mais la moindre modification de structure du modèle entraînerait de gros changements dans un tel programme d'identification. Nous avons donc choisi la méthode suivante :

1°) Détermination des réponses indicielles des 4 blocs élémentaires ci-dessous :

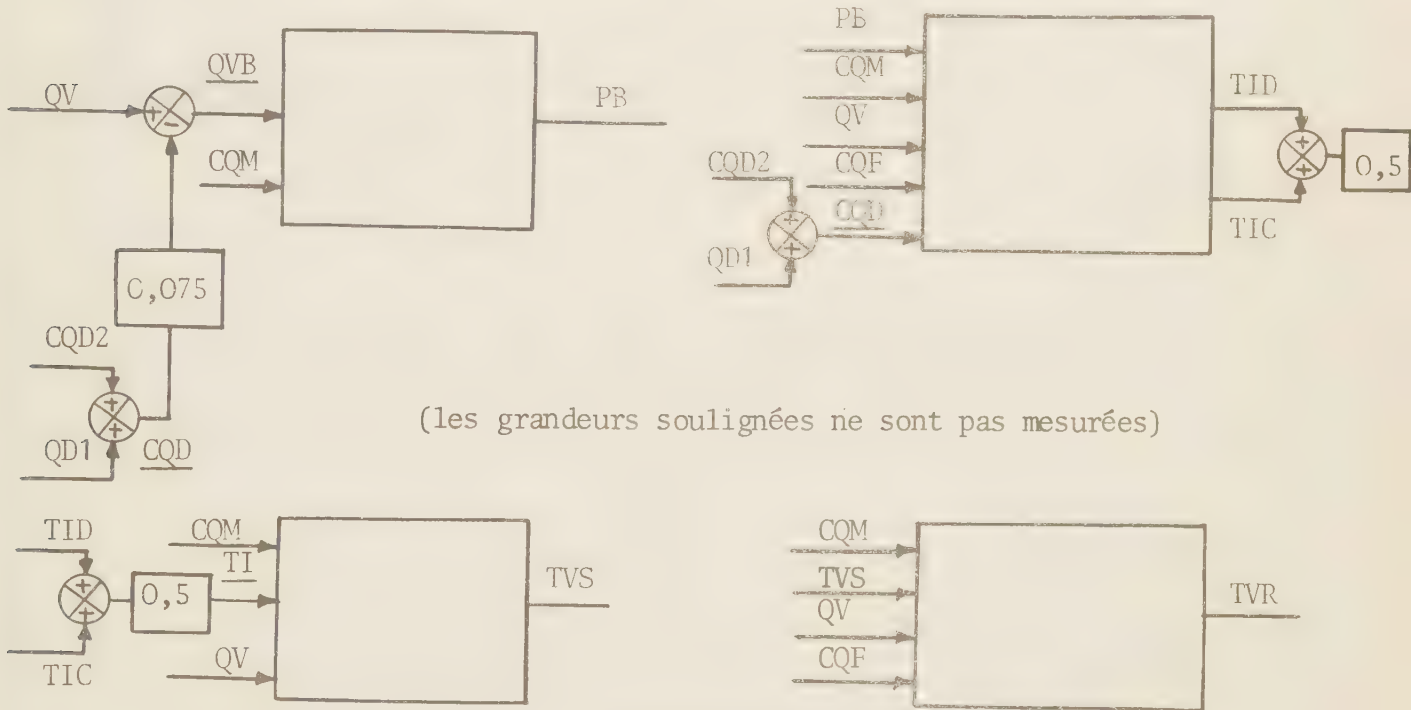


Fig.VI-15

2°) Calcul des paramètres du modèle à partir des réponses indicielles de ces blocs élémentaires.

5-1) Détermination des réponses indicielles :

Pour chacun des blocs élémentaires, nous déterminons tout d'abord par filtrage non linéaire un modèle sous la forme de transmittances discrètes multi-entrées mono-sortie et nous en déduisons ensuite les réponses indicielles.

Nous considérons donc le modèle à p entrées de la figure VI-16.

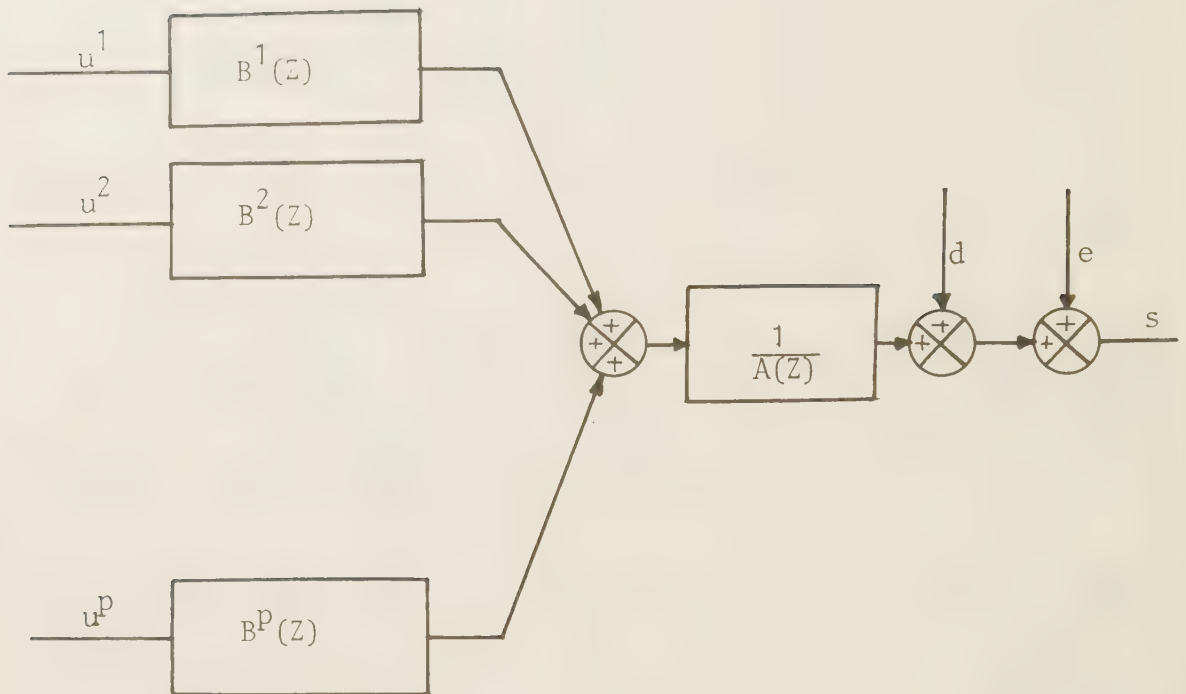


Fig. VI-16

Ce modèle est celui déjà choisi au chapitre précédent où u_k^i est la séquence des entrées, s_k la séquence de la sortie, d une composante continue et e_k un bruit de mesure supposé être pseudo-blanc centré de variance V_e . $A(Z)$ est le dénominateur commun à toutes les entrées et $B^i(Z)$ les numérateurs.

C'est bien sûr le même programme que celui décrit au § 3 du Chapitre V que nous avons utilisé en conservant l'initialisation standard.

Le nombre de paramètres à identifier étant assez important, la longueur de nos enregistrements est trop faible pour observer une bonne convergence du filtre. On réitère donc le filtrage sur les mêmes données avec pour valeurs initiales des paramètres, les valeurs finales du passage précédent.

Une simulation nous donne à chaque passage la sortie modèle $\{sm_k\}$, l'écart objet/modèle $\{e_k^*\}$ ainsi que l'erreur quadratique moyenne e_q :

$$e_q(\%) = 100 \times \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (s_k - sm_k)^2}{\sum_{k=1}^N (s_k - \bar{s})^2}} \quad \text{avec :} \quad \begin{array}{l} \bar{s} \text{ la valeur moyenne} \\ \text{de la sortie } \{s_k\} \text{ et } N \\ \text{le nombre de points de} \\ \text{l'enregistrement.} \end{array}$$

On observe au cours des différents passages une décroissance de l'erreur quadratique moyenne e_q . Lorsque cette décroissance n'est plus sensible, on arrête l'itération (en général, 3 ou 4 passages suffisent).

Les résultats obtenus pour les 4 sous-systèmes élémentaires décrits précédemment ont été les suivants :

enregistrement	sorties	écart type de e(volt)	écart type de e^* (volt)	erreur quadra- tique moyenne: e_q %	observations
1 27 sept. 73	TI	0,039	0,038	19,8 %	
	TVS	0,017	0,017	9,3 %	
	TVR	0,067	0,071	90,8 %	mise en service de l'injection de sécurité
	PB	0,016	-	-	transmittance instable
2 18 oct. 73	TI	0,037	0,038	24,7 %	
	TVS	0,019	0,019	12,7 %	
	TVR	0,020	0,021	19,6 %	
	PB	0,024	-	-	transmittance instable

enregistrement	sorties	écart type de e(volt)	écart type de e* (volt)	erreur quadra- tique moyenne: $e_q \%$	observations
3 21 nov. 73	TI	0,037	0,038	25,8 %	
	TVS	0,010	0,011	17,1 %	
	TVR	0,017	0,017	11,6 %	
	PB	0,031	-	-	transmittance instable
4 29 nov. 73	TI	0,053	0,052	32,2 %	
	TVS	0,017	0,017	11,8 %	
	TVR	0,022	0,023	14,2 %	
	PB	0,036	-	-	transmittance instable
5 20 déc. 73	TI	0,042	0,042	45,6 %	Essai PRBS (faibles variations sur les sorties)
	TVS	0,012	0,011	32,9 %	
	TVR	0,023	0,023	28,8 %	
	PB	0,014	-	-	transmittance instable
6 26 fév. 74	TI	0,059	0,060	39,4 %	
	TVS	0,028	0,030	21,3 %	
	TVR	0,063	0,081	62,7 %	
	PB	0,031	-	-	transmittance instable

enregistrement	sorties	écart type de e (volt)	écart type de e^* (volt)	erreur quadra- tique moyenne : e_q %	observations
7 23 sept. 74	TI	0,057	0,060	27,1 %	Essai en boucle ouverte sur les températures
	TVS	0,026	0,027	10,2 %	
	TVR	0,066	0,066	22,7 %	
	PB	0,024	-	-	
8 30 sept. 74	TI	0,025	0,025	20,4 %	Essai en boucle ouverte sur les températures
	TVS	0,019	0,020	15,9 %	
	TVR	0,026	0,027	13,3 %	
	PB	0,031	-	-	

L'ordre du dénominateur a toujours été choisi égal à 2. Ces identifications ont été faites avec une période d'échantillonnage de 20 s. Pour cela, on prend une valeur moyenne sur 4 points (période de base 5 s). De plus, on retranche à chaque grandeur sa valeur moyenne calculée sur tout l'enregistrement, ceci pour avoir des données centrées qui facilitent l'identification. En effet, la convergence du filtre est alors plus rapide, le traitement demande moins de passages réitérés d'où un gain de temps de calcul appréciable.

On remarquera, d'autre part, dans le tableau ci-dessus que les écarts types de e et de e^* sont toujours très voisins indiquant ainsi un bon fonctionnement du filtre secondaire d'estimation des variances.

On notera que l'on peut utiliser un enregistrement même si une chaîne donne des résultats aberrants. Par exemple, l'essai n°1 nous permet d'identifier correctement les blocs donnant TI, TVS et PB bien que la chaîne de resurchauffe TVR ne puisse être utilisée pour déterminer le modèle (incident à l'enregistrement).

A partir des transmittances discrètes, nous déterminons les réponses indicielles des figures (VI-18) à (VI-27).

Remarque : Nous disposons non seulement des mesures des commandes (CQM, CQD, CQF) mais aussi des mesures de débit (QM, QD, QF) et il est intéressant de comparer les réponses de chaque bloc par rapport aux commandes et par rapport aux débits mesurés. Les résultats obtenus sont très semblables à ceux exposés ci-dessus avec généralement des écarts quadratiques moyens légèrement plus faibles comme on pouvait s'y attendre.

A titre d'exemple, nous donnons les résultats comparés pour l'enregistrement n°8 :

sorties	entrées	écart type de e (en volts)	écart type de e^* (en volts)	écart quadratique moyen : e_q en %
TI	CQM, CQD, CQF	0,025	0,025	20,4 %
	QM, QD, QF	0,024	0,024	19,8 %
TVS	CQM, CQD, CQF	0,019	0,020	15,9 %
	QM, QD, QF	0,020	0,021	16,7 %
TVR	CQM, CQD, CQF	0,026	0,027	13,3 %
	QM, QD, QF	0,023	0,024	11,8 %
PB	CQM, CQD, CQF	0,031	-	-
	QM, QD, QF	0,029	-	-

Les réponses indicielles sont assez voisines comme le montre la figure VI-17 pour la sortie TI et les entrées CQM ou QM.

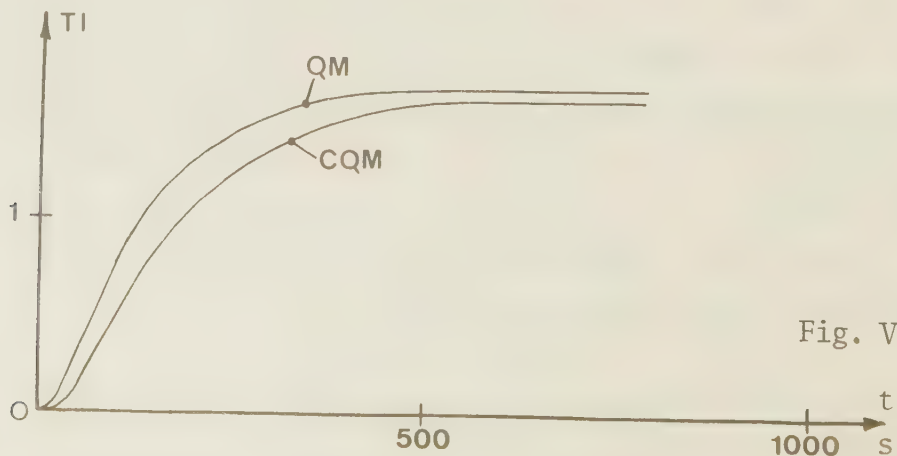


Fig. VI-17

5-2) Détermination des paramètres du modèle :

A partir des réponses indicielles déterminées par la méthode exposée plus haut, il s'agit de déterminer les paramètres du modèle "physique" du paragraphe 3. Ce modèle faisant intervenir uniquement des fonctions de transfert du premier et second ordre, il est simple de déterminer par les méthodes graphiques classiques les constantes de temps et les gains statiques intervenant dans le diagramme. Compte tenu de la dispersion relative des résultats, il serait en effet injustifié de faire appel à des méthodes plus précises.

Remarquons que certaines constantes de temps (τ_M , τ_F , ...) peuvent être obtenues à partir des réponses de deux blocs distincts. Un compromis est alors adopté entre les diverses valeurs trouvées lorsque celles-ci ne sont pas tout-à-fait identiques.

Le modèle de pression PV est non dynamique :

$$PV = PB - \alpha QV + \beta$$

L'identification des coefficients α et β se fait par filtrage linéaire et ne pose pas de problème majeur.

A titre d'exemple, nous donnons les résultats obtenus à partir des essais 2 et 3.

essai n°2

$$PV = 1,10 PB - 0,124 QV + 0,592$$

L'écart type objet/modèle étant de 0,015 volt (22 %)

essai n°3

$$PV = 1,09 PB - 0,139 QV + 0,005$$

L'écart type objet/modèle est ici de 0,007 volt (7,6 %)

On remarquera que les coefficients de PB et de QV sont très semblables, l'écart observé sur le coefficient β étant dû à une différence importante du point de fonctionnement (240 MW et 200 MW).

Nous donnons Figure (VI-28) modèle déterminé à partir des 6 premiers essais, puis celui déduit des essais 7 et 8 Figure (VI-29).

6 - CONCLUSION

La première conclusion consiste évidemment à faire ressortir que le modèle développé a servi de base à l'élaboration d'une régulation numérique elle-même satisfaisante. Néanmoins, il est bon de souligner quelques autres points.

La méthode utilisée semble ici parfaitement adaptée et a donné des résultats satisfaisants, confirmés d'ailleurs par une approche totalement différente (Approximation minimale [16]). On notera (Figure VI-30) que les modèles obtenus par les deux méthodes ont des réponses pratiquement superposables. Cependant, on peut se demander si l'on n'aurait pas pu obtenir un modèle également satisfaisant par des procédés plus rudimentaires. Sans pouvoir affirmer que non, il faut néanmoins souligner que la contrainte d'excitation en boucle fermée interdisait une simple analyse indicielle en boucle ouverte et, il fallait donc utiliser une méthode d'identification adaptée à des signaux d'entrée-sortie quelconques. Par ailleurs, la durée limitée des essais et le niveau des perturbations (20 à 30 % des variations des sorties) auraient rendu hasardeux d'envisager des méthodes élémentaires telles que l'identification par corrélation. Finalement, le filtrage non linéaire est ici bien adapté au problème.

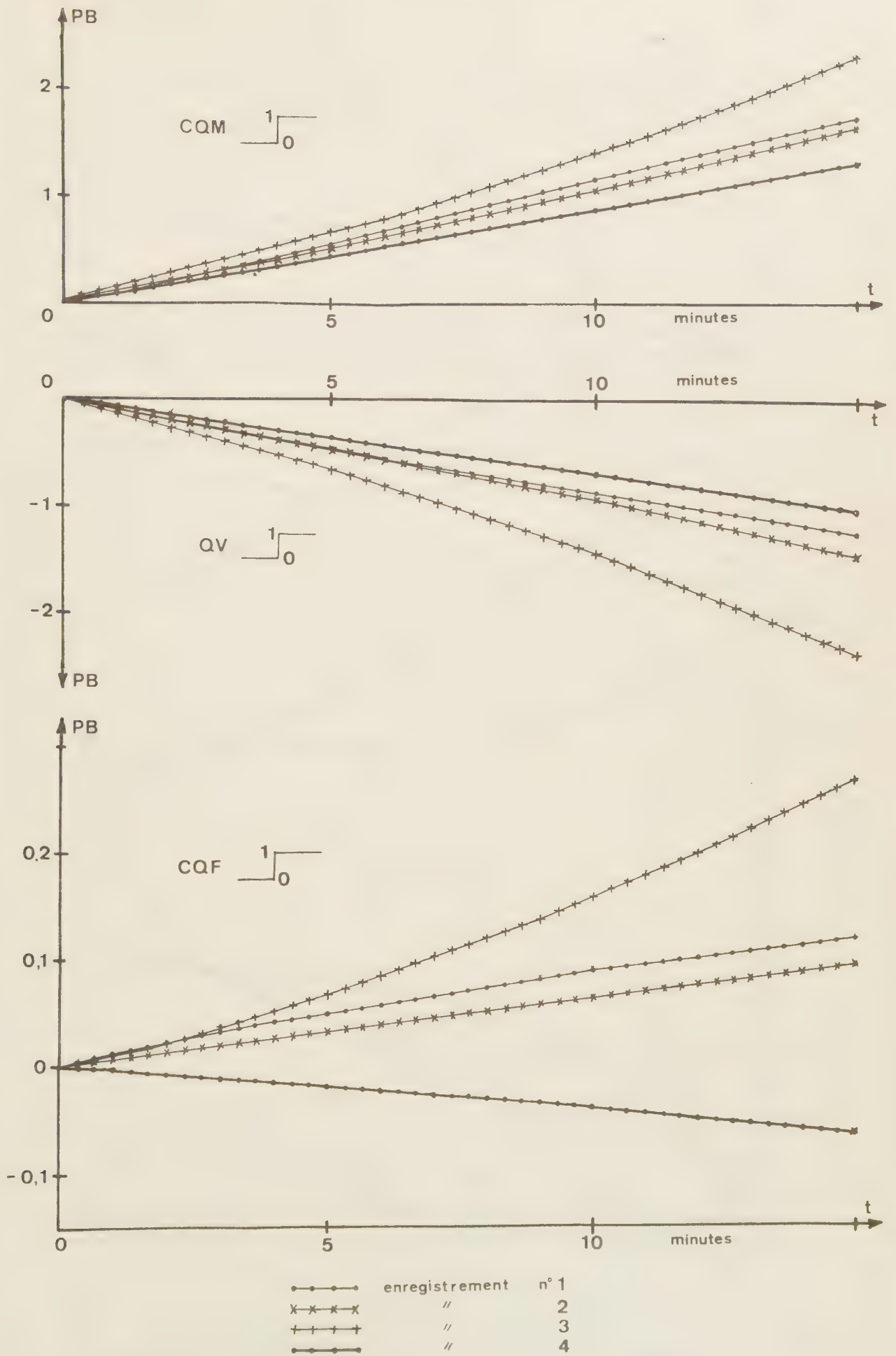


Fig.VI-18 : Réponses indicielles de la pression ballon.

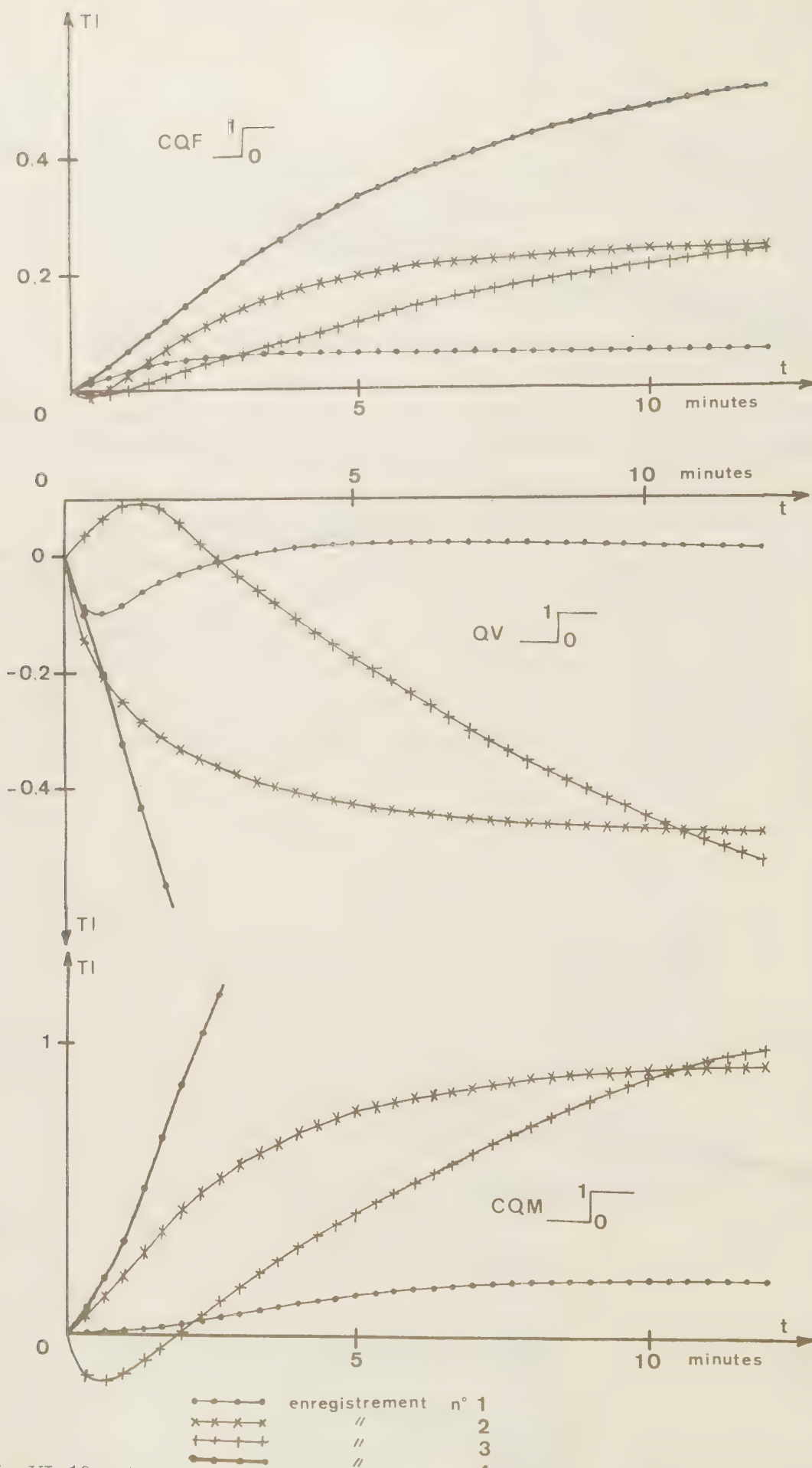


Fig.VI-19: Réponses indicielles de la température intermédiaire.

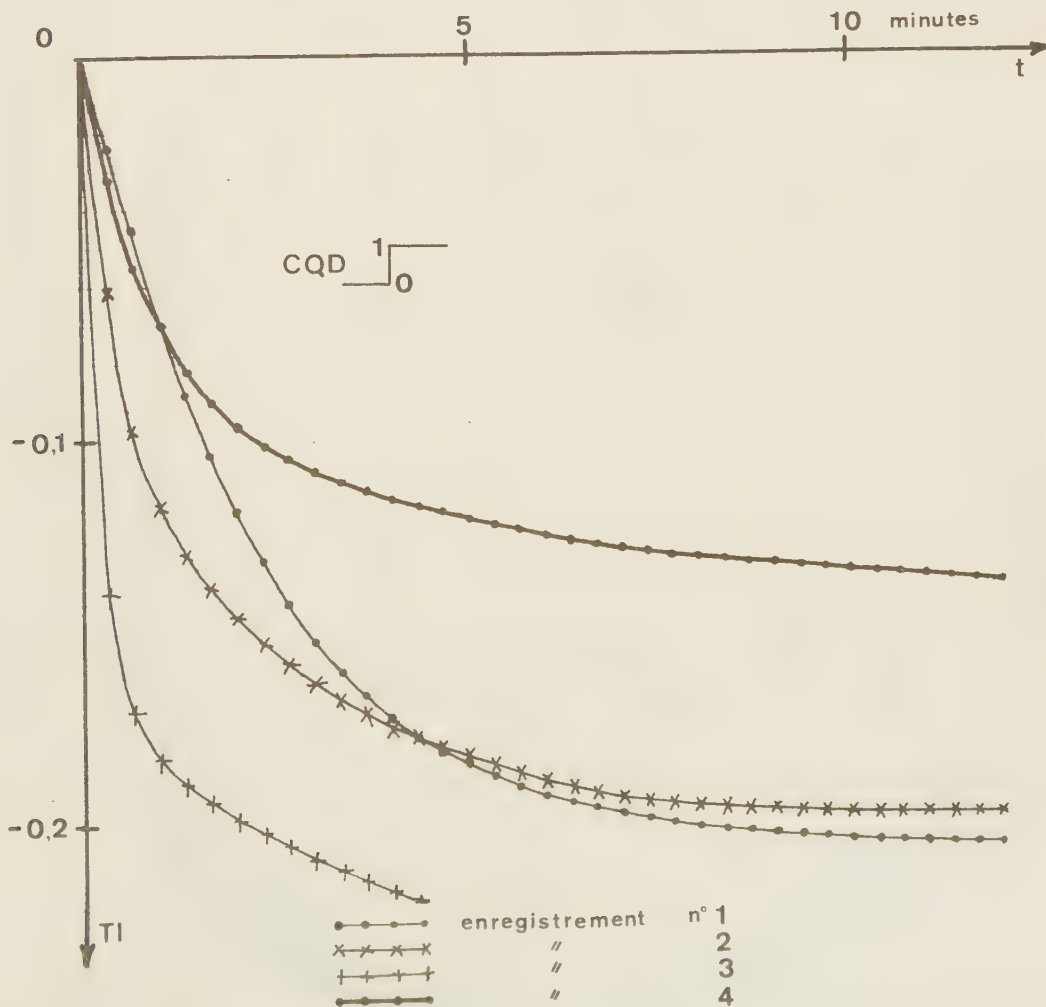
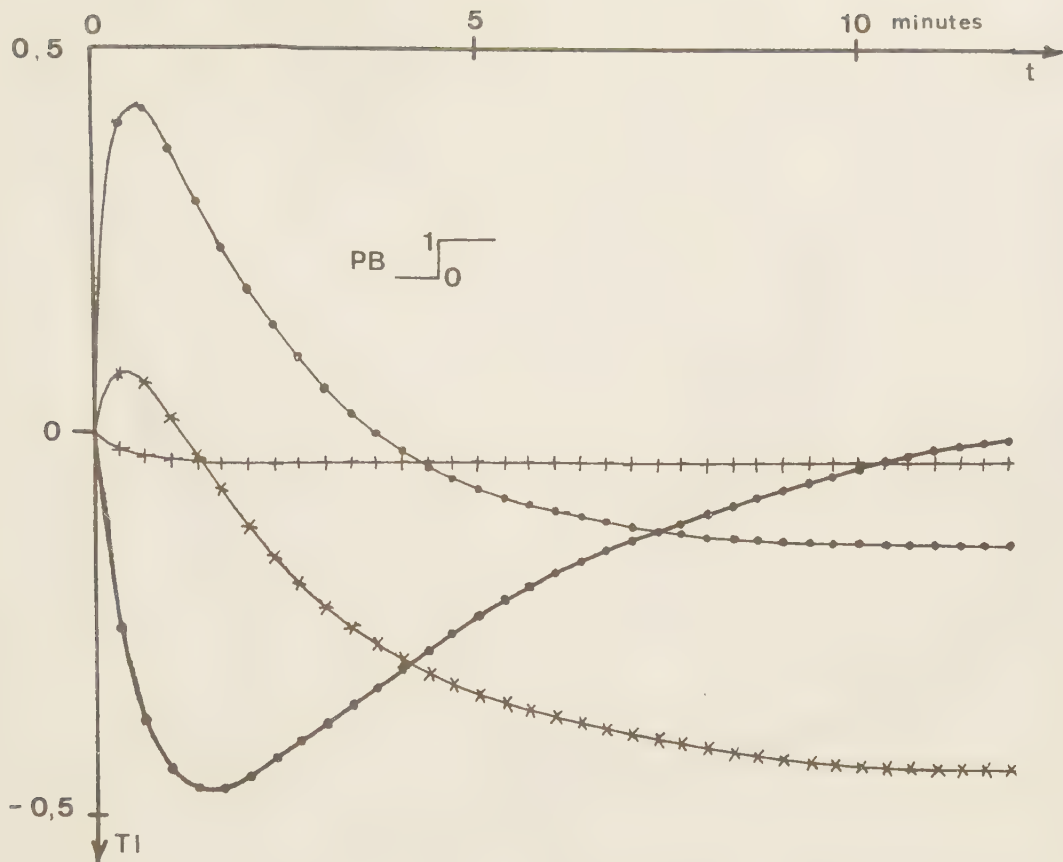


Fig. VI-20 : Réponses indicelles de la température intermédiaire (suite)

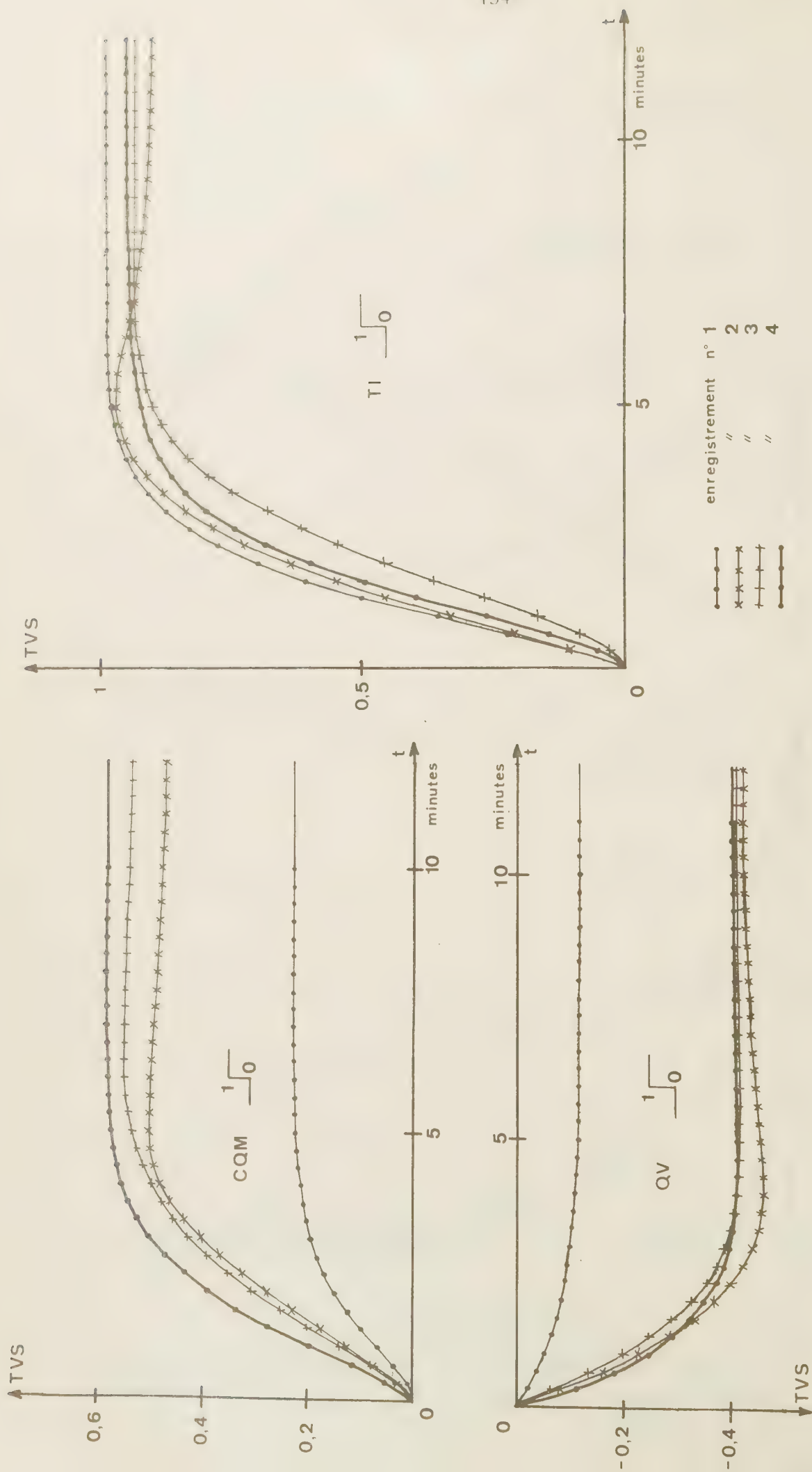


Fig. VI-21 : Réponses indicielles de la température de surchauffe.

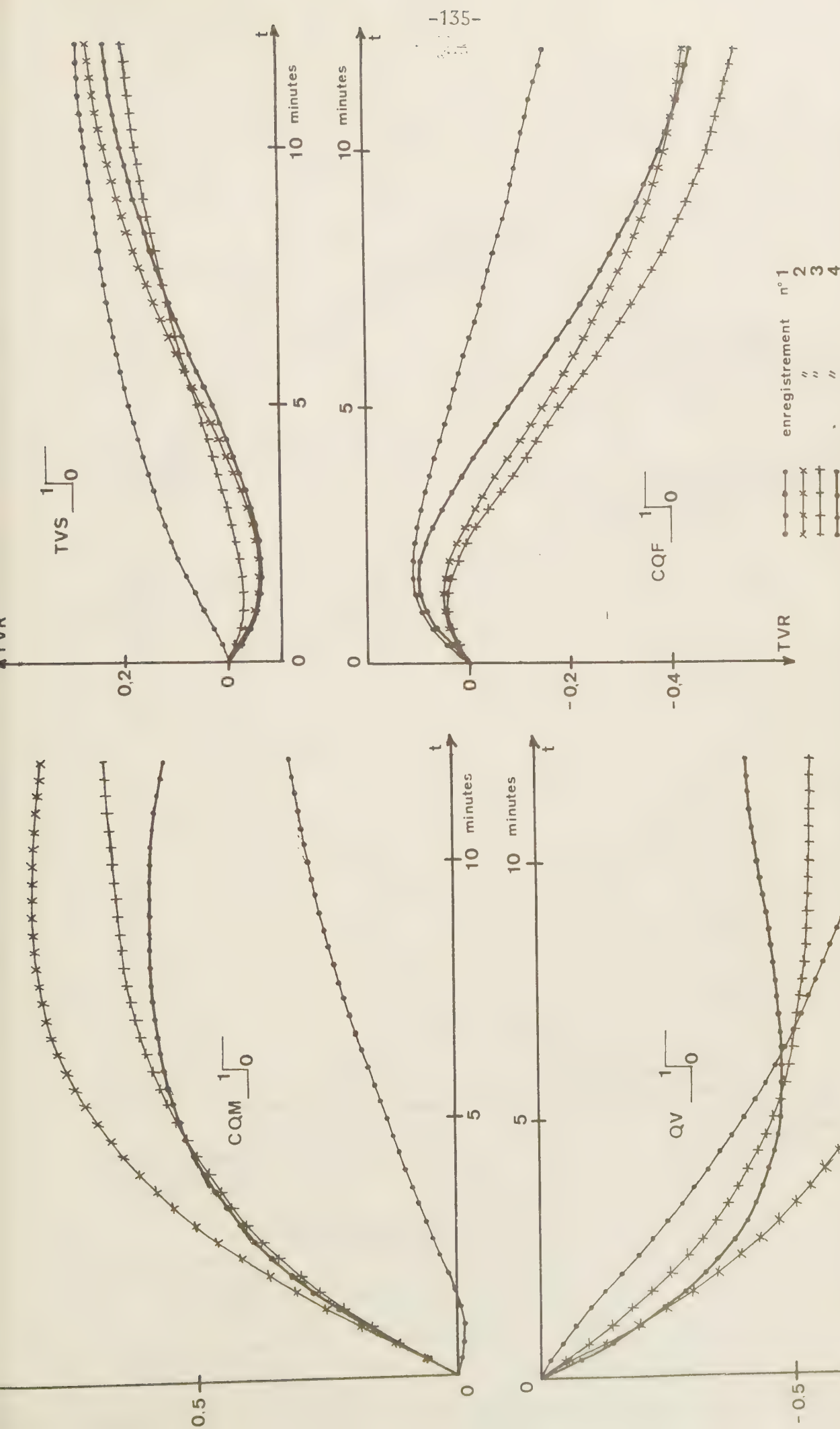
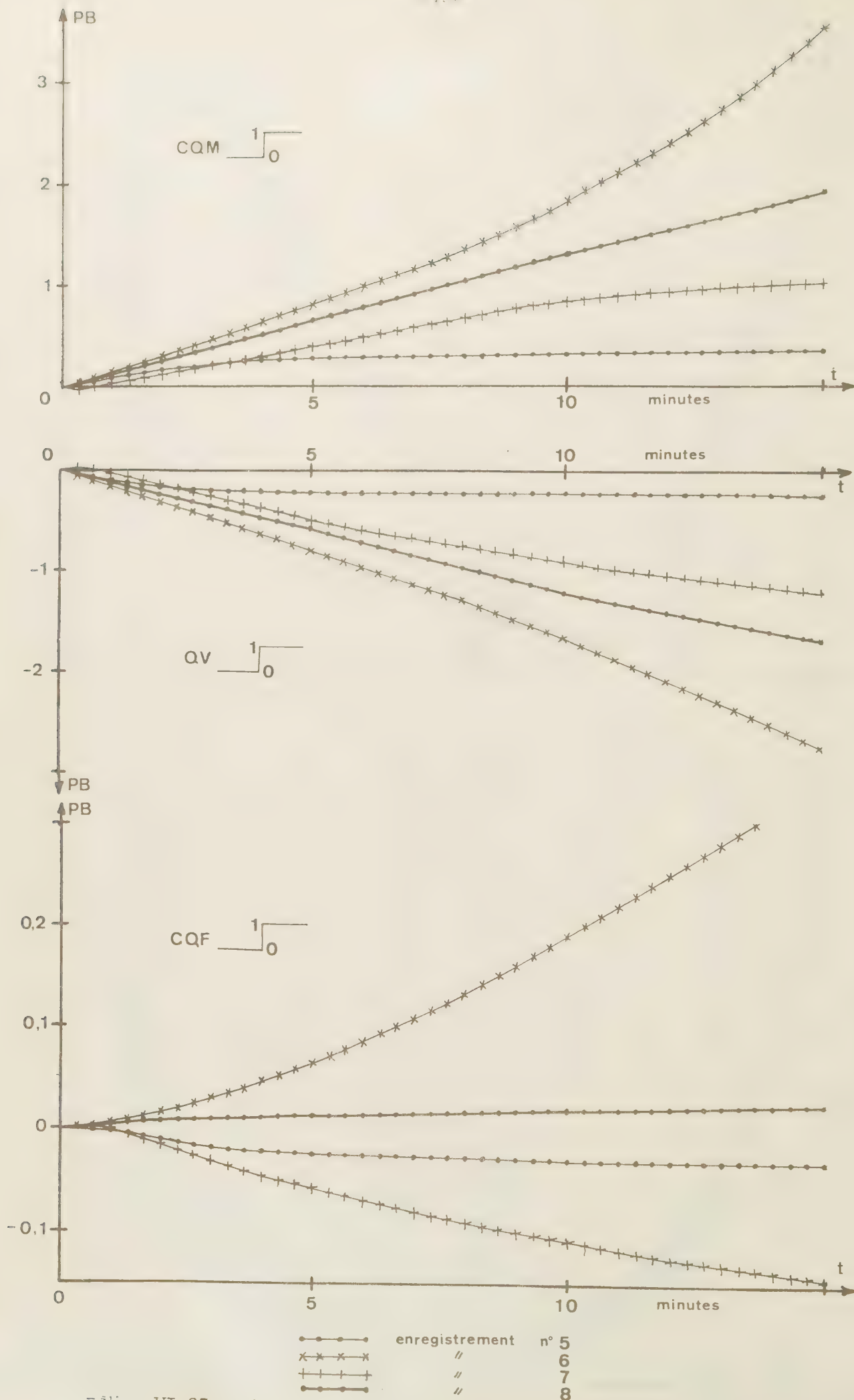


Fig. VI-22 : Réponses indicielles de la température de resurchauffe



- Fig. VI-23: Réponses indicielles de la pression ballon.

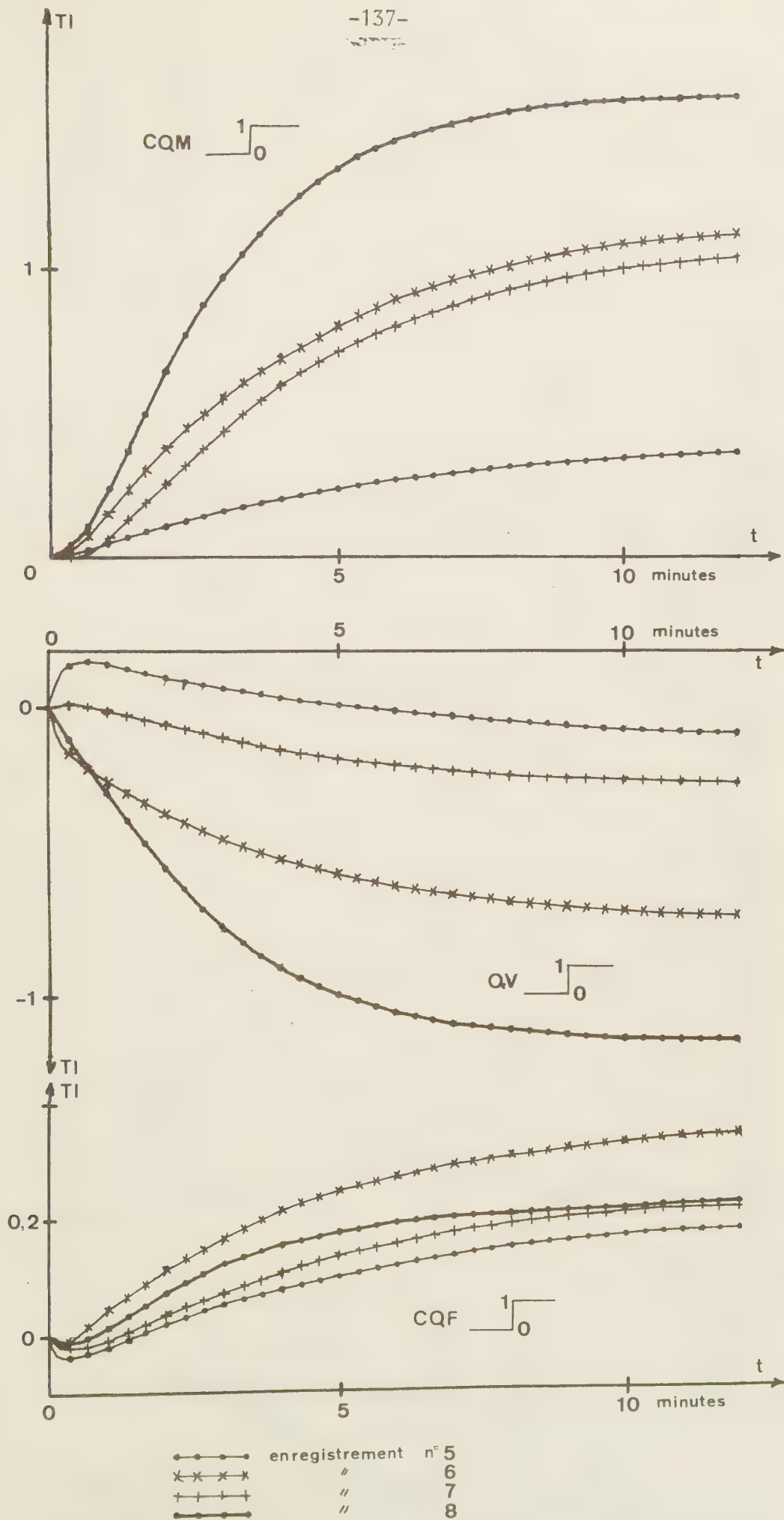


Fig. VI-24 : Réponses indicielles de la température intermédiaire.

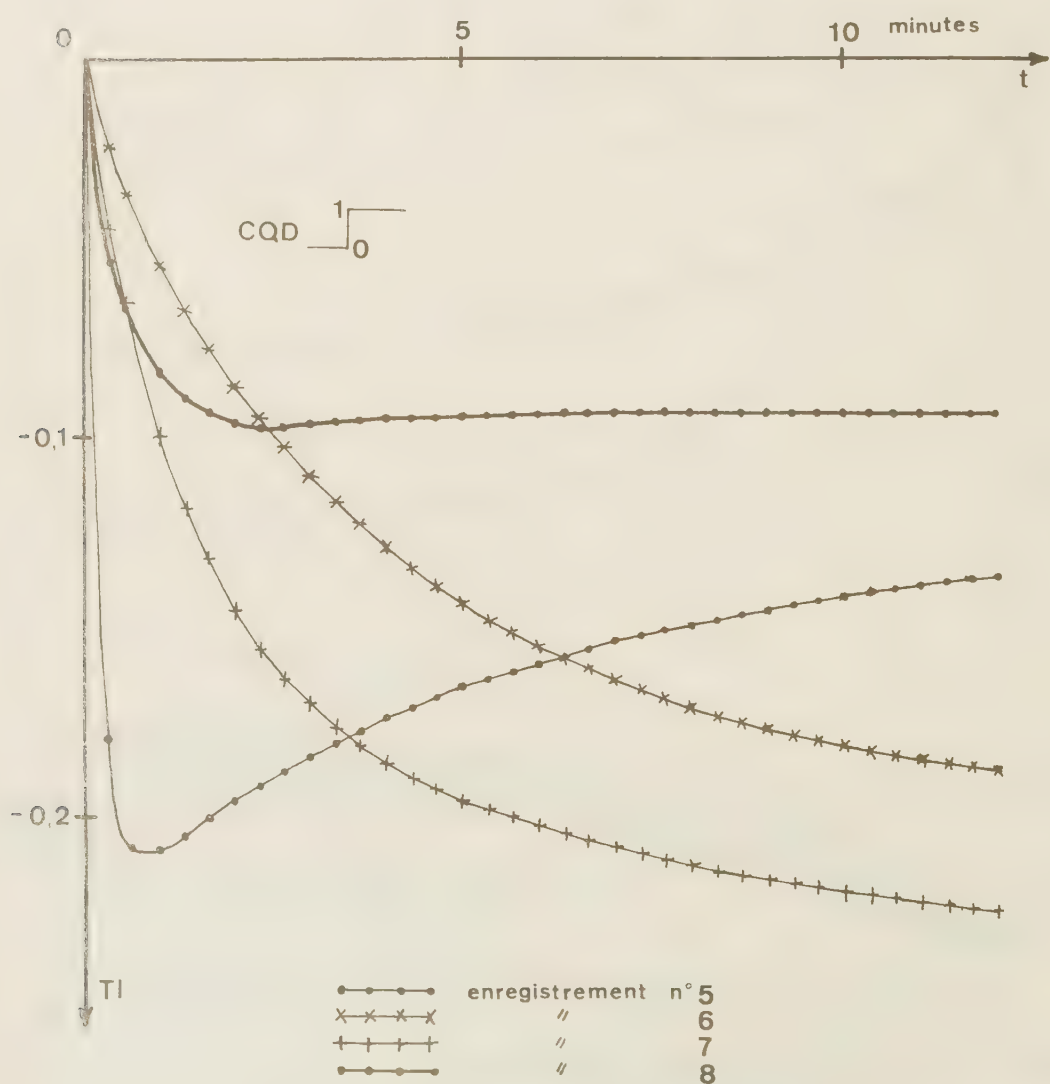
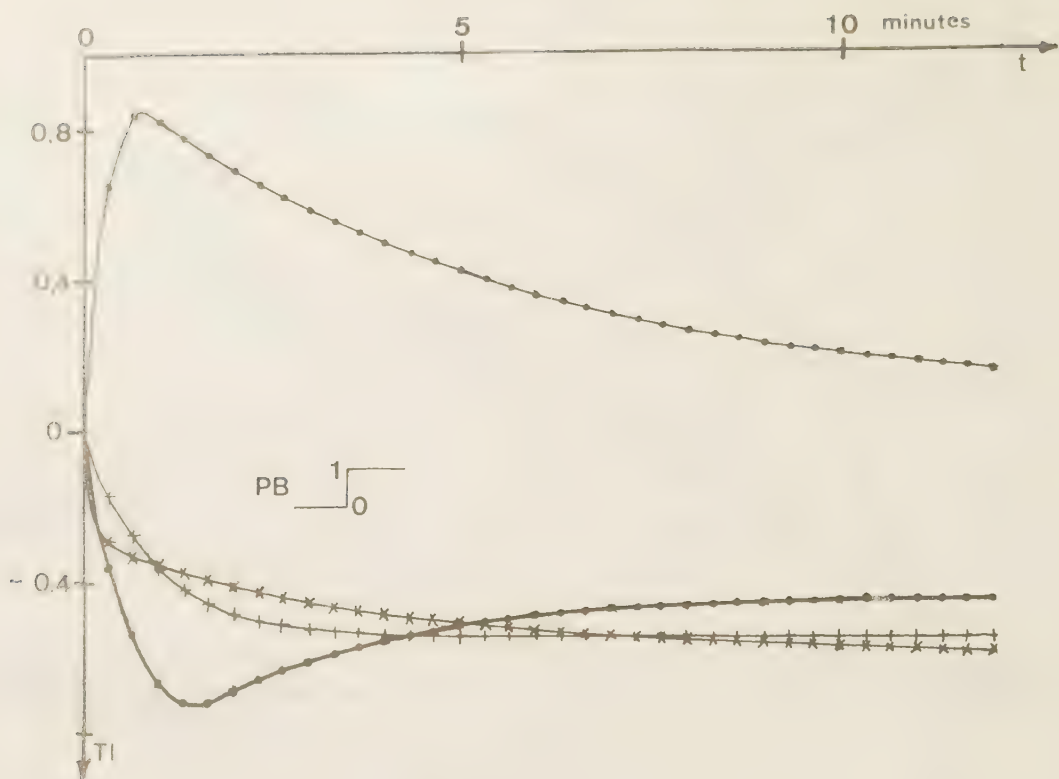


Fig. VI-25: Réponses indicielles de la température intermédiaire (suite)

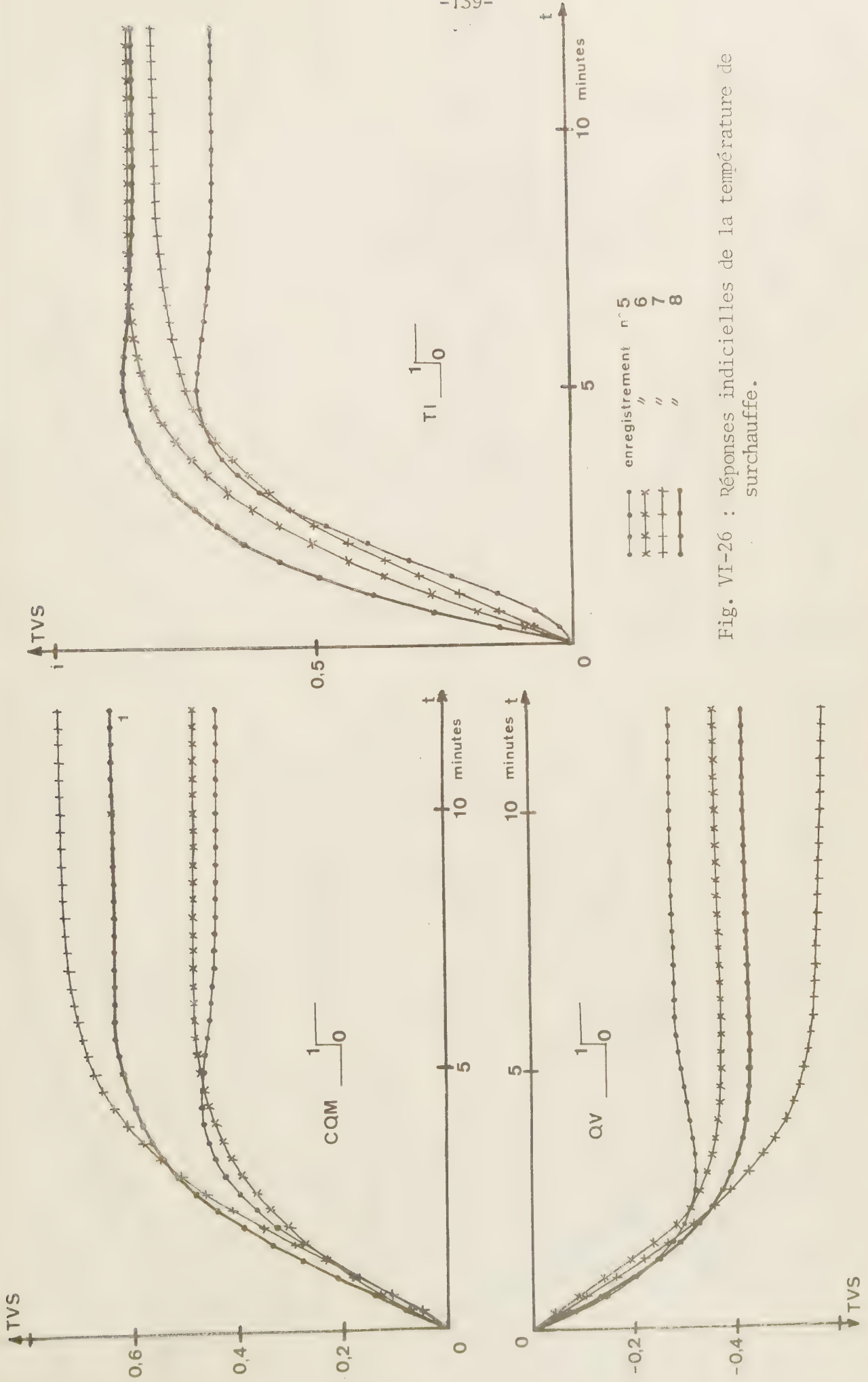


Fig. VI-26 : Réponses indicielles de la température de surchauffe.

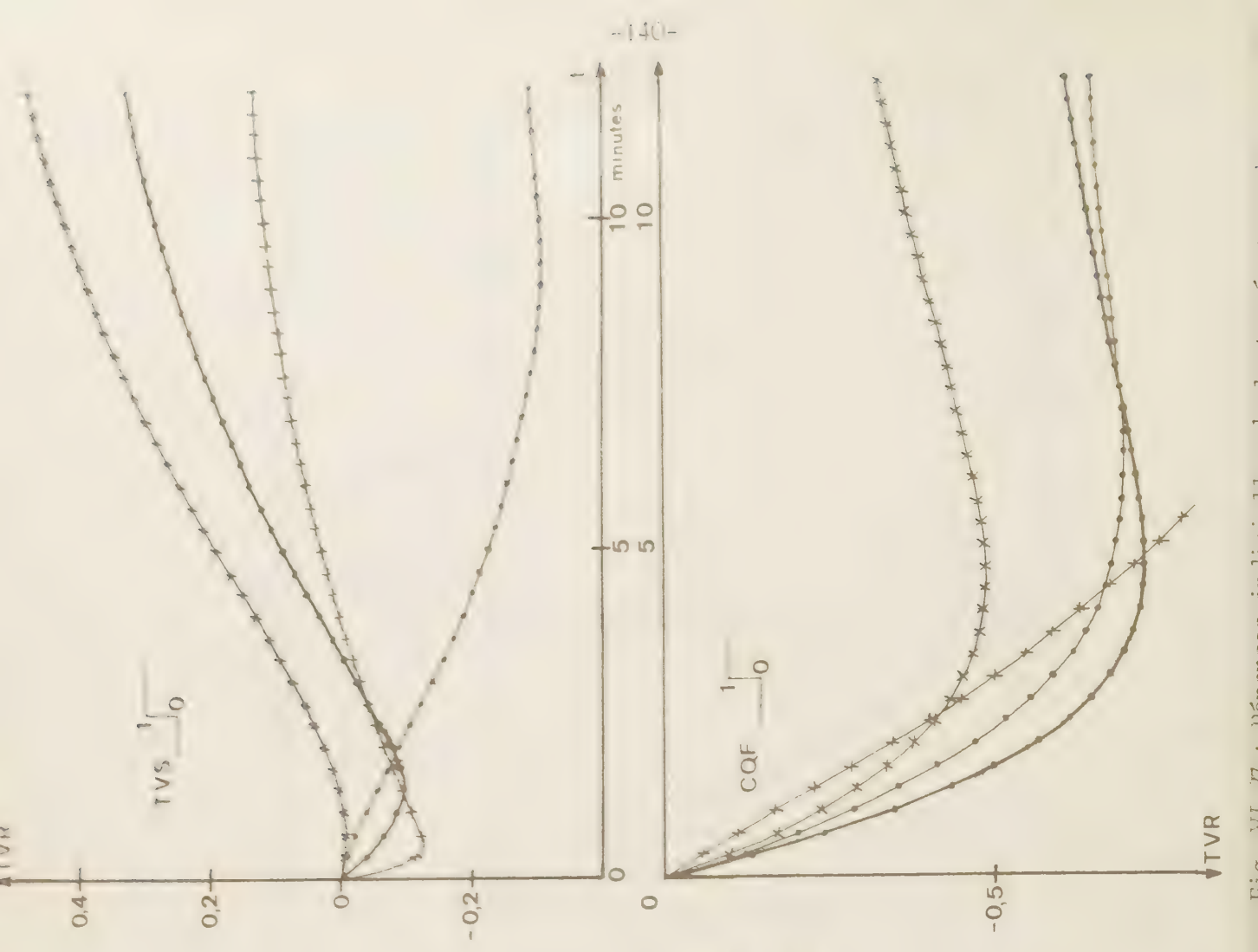
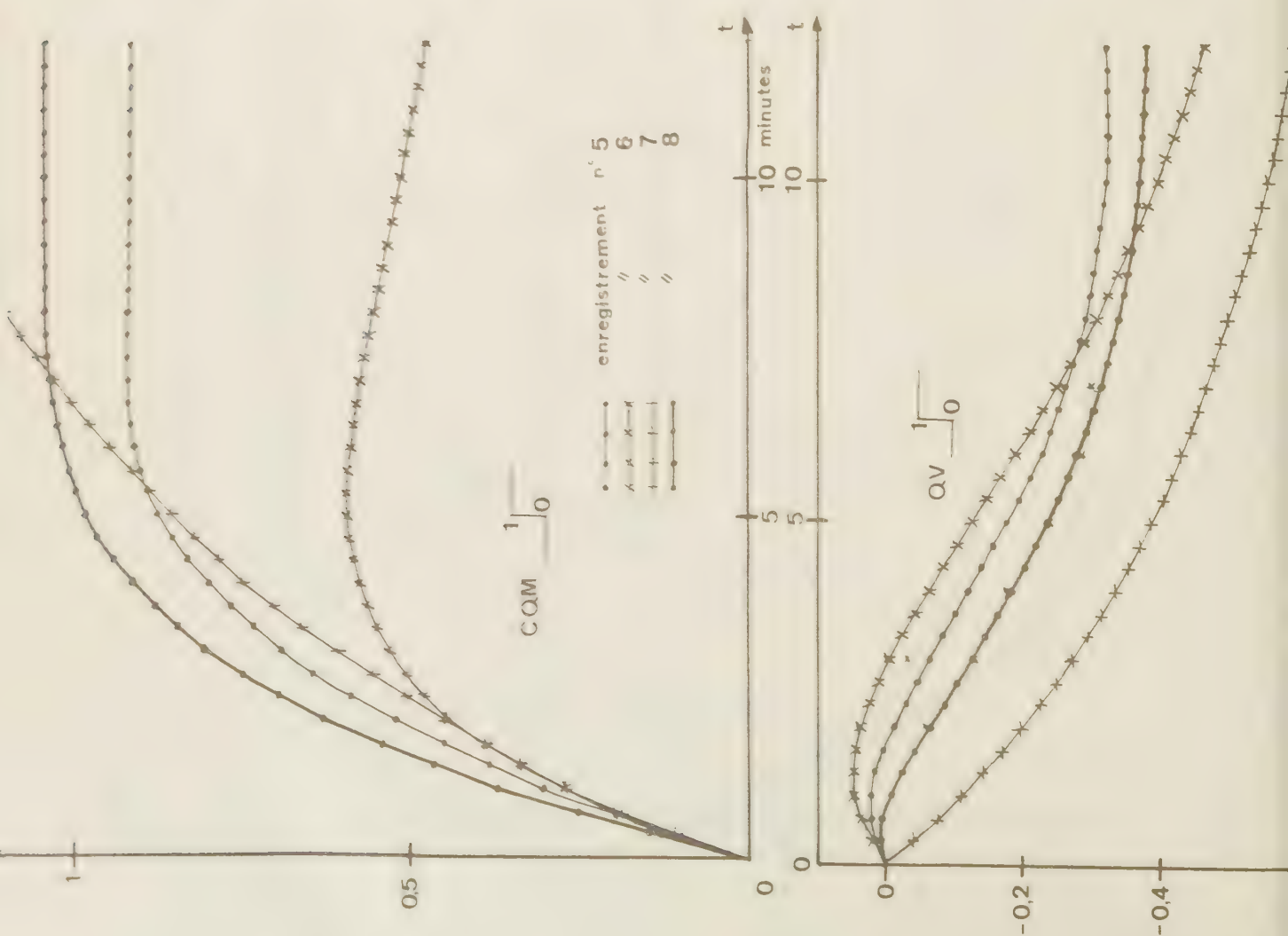


Fig. VI. 7. Dépendance des paramètres TVS, TVR, CQM, QV en fonction du temps.

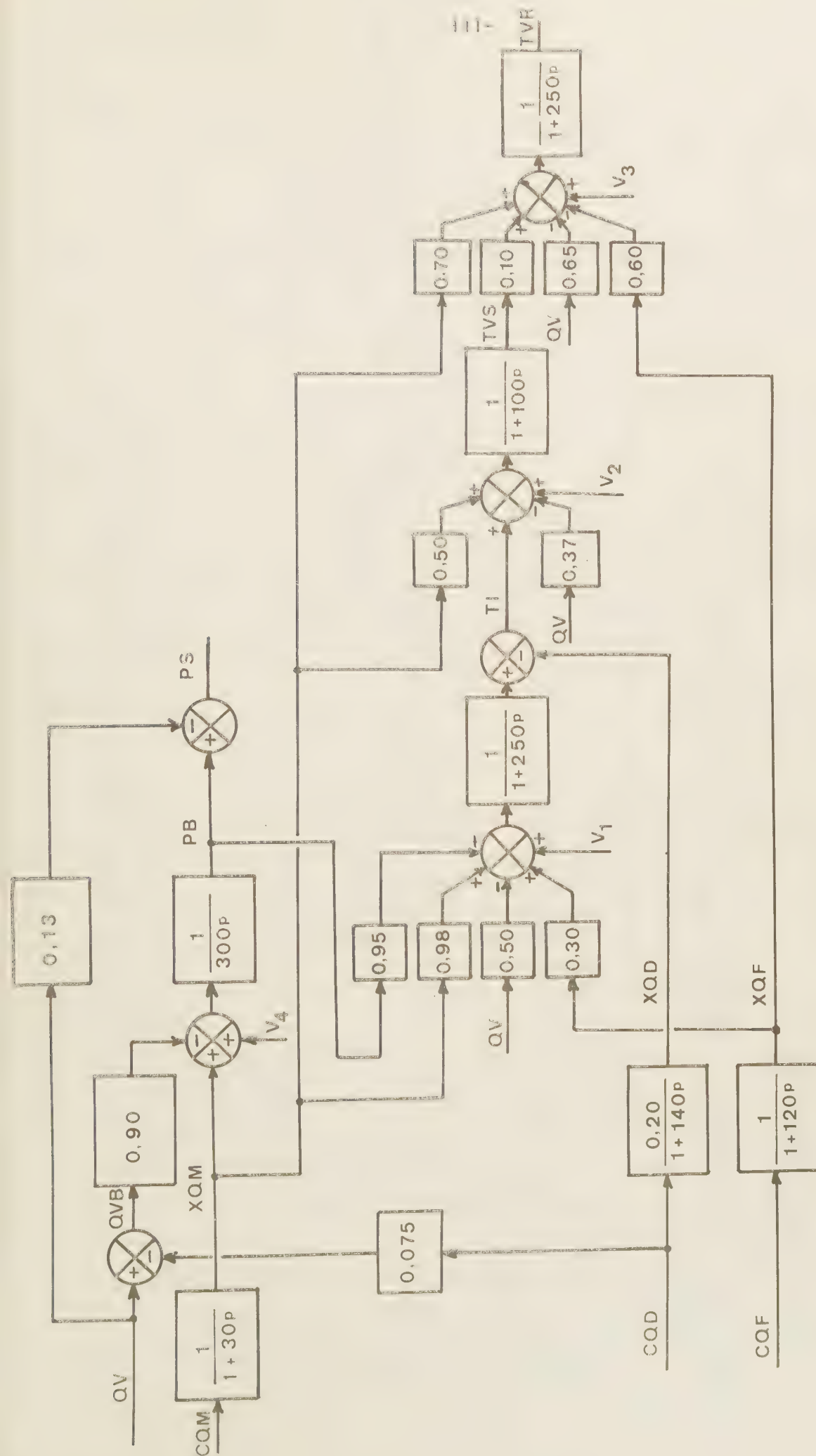


Fig. VI-28 : Modèle n°1 (essais 1 à 6)

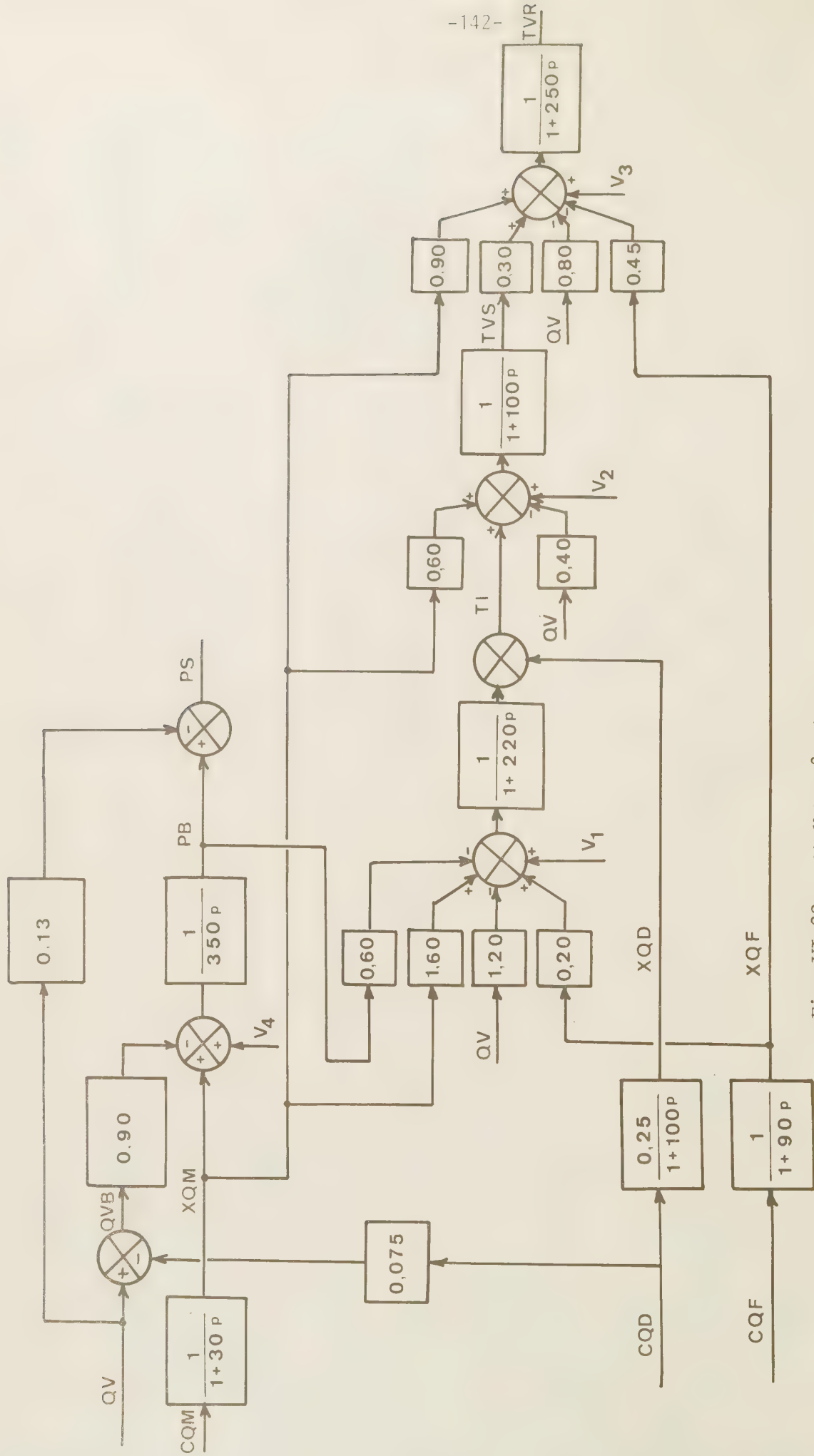
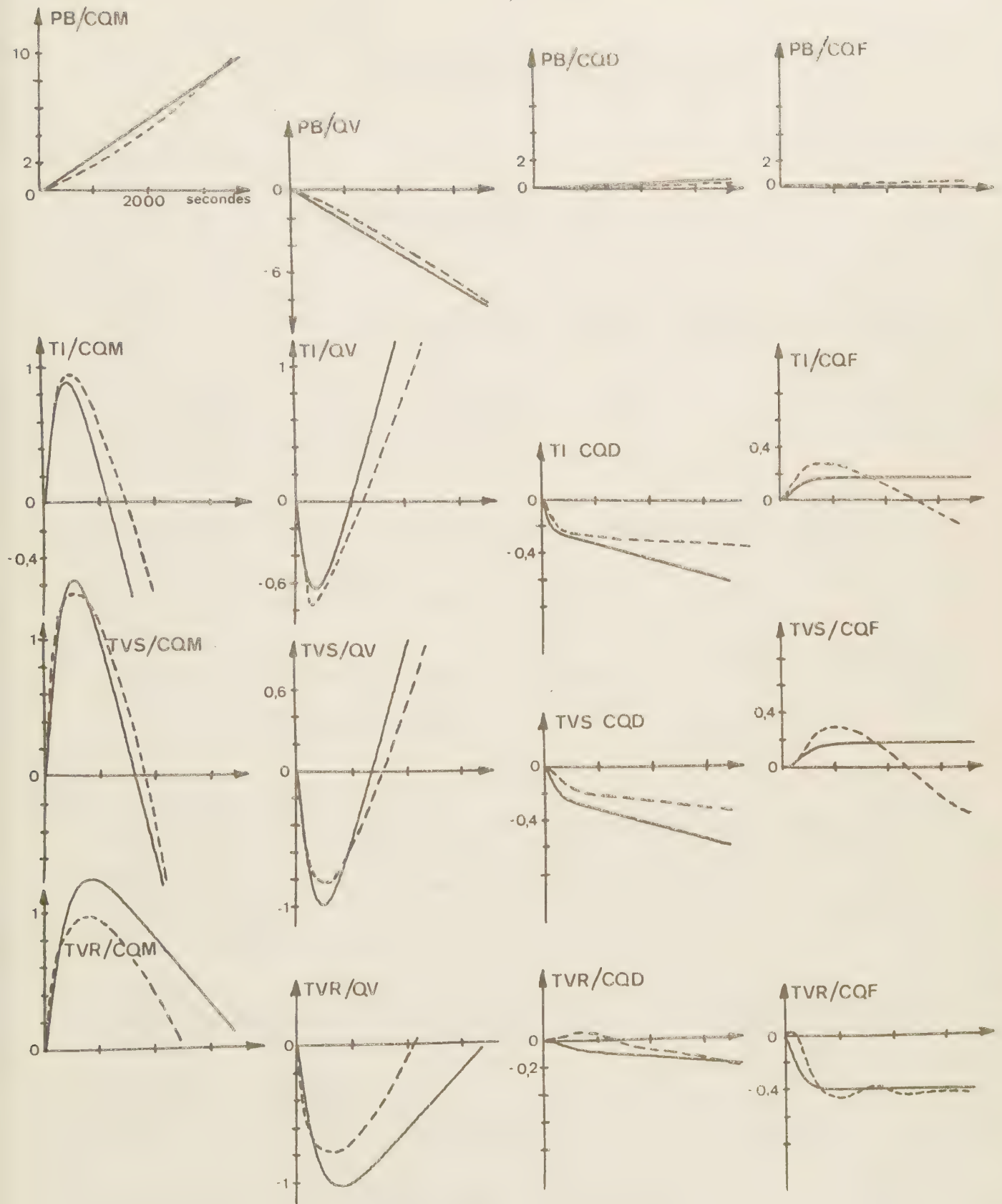


Fig. VI-29 : Modèle n°2 (essais 7 et 8)



— modèle "physique" : Filtrage non linéaire

--- modèle "boîte noire" : Approximation minimale

Fig. VI-30 : Comparaison des réponses indicielles du modèle "physique" et du modèle "boîte noire".

BIBLIOGRAPHIE VI

- [1] GOUJON M., MIOSSEC C.
Centrale de Nantes-Cheviré
Régulation des températures de vapeur.
Rapport E.D.F. AMP n° 54 - juillet 1969.
- [2] GOUJON M.
Nantes-Cheviré Tranche 5
Essais sur le comportement de la pression et des températures de vapeur
Rapport E.D.F. AMP n° 92 - août 1972.
- [3] LECOUTURIER J.
Centrale de Nantes-Cheviré Tranche 5
Expérience de régulation numérique
Note E.D.F. J22 n° 121 - octobre 1973.
- [4] DANG VAN MIEN H.
Régulation numérique de la température de surchauffe d'un générateur de vapeur.
Centrale de Pont sur Sambre
Rapport E.D.F. AMP n° 48 - juillet 1970.
- [5] MIOSSEC C.
Régulation numérique des principales chaînes de régulation du générateur de vapeur
Centrale de Pont sur Sambre
Rapport E.D.F. AMP n° 99 - 1972.
- [6] FAUQUE J.M.
Système T2000 Nantes-Cheviré
Notice d'utilisation Rapport C.E.R.C.I. DIT/NE 1448/Z369 - février 1974.
- [7] FAUQUE J.M.
Système T2000 Nantes Cheviré
Dossier technique
Rapport C.E.R.C.I. DIT/NE 1448/Z370 - février 1974.
- [8] SCHOCH J.P.
Simulation analogique de la tranche 5 de la Centrale de Nantes-Cheviré
Rapport de Stage - E.N.S.M. - octobre 1973.
- [9] De LARMINAT Ph., THOMAS Y.
Etude d'une régulation optimale
Rapport D.G.R.S.T. 68.01.409 - juin 1970.
- [10] De LARMINAT Ph.
Sur l'identification par filtrage non linéaire
Thèse de Docteur ès-sciences - Nantes - mai 1971.
- [11] PIASCO J.M.
Applications de l'identification par filtrage non linéaire sous-optimal
D.E.A. d'Automatique - Nantes - octobre 1971.

- | 12 | De LARMINAT Ph., PIASCO J.M.
Identification par filtrage non linéaire sous optimal
Journée d'étude - Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. - 25 juin 1971.
- | 13 | De LARMINAT Ph., PIASCO J.M.
Identification d'une tranche de centrale thermique par filtrage non linéaire.
Journée d'étude sur l'estimation en ligne des paramètres de processus sur mini-ordinateur - CE.N. Saclay - 18 avril 1975.
- | 14 | De LARMINAT Ph., THOMAS Y., SARLAT D., DESCUSSE J., PIASCO J.M.
"Commande optimale - Identification et régulation en Centrale Thermique E.D.F."
Rapport D.G.R.S.T. 72-7-0159. Mars 1975.
- | 15 | De LARMINAT Ph., THOMAS Y., SARLAT D., BARRAUD A., DESCUSSE J., PIASCO J.M.
"Identification et régulation numérique optimale en Centrale Thermique"
Congrès AFCET, Toulouse (1975).
- | 16 | BARRAUD A.
"Réalisation minimale et approximation optimale des systèmes dynamiques linéaires invariants"
Thèse de Docteur-ès-Sciences - Nantes (1975).

CONCLUSION

Rappelons tout d'abord les principaux aspects de ce travail, consacré à l'étude de l'identification des systèmes dynamiques à l'aide de filtres non linéaires approximativement optimaux.

Le filtre discret, que nous proposons, est basé sur un développement au second degré des non linéarités, autour de l'estimation courante, et sur l'hypothèse gaussienne. Dans le cas linéaire, le filtre obtenu est strictement optimal et est identique au filtre de Kalman dont on retrouve les propriétés de convergence. Par contre, dans le cas non linéaire, les estimations successives ne sont que des approximations de l'espérance de l'état conditionnelle aux mesures et rien n'assure dans ce cas là la convergence du filtre (ce qui est généralement le cas des filtres non linéaires approximativement optimaux). Notons cependant que l'approximation gaussienne de l'état se conserve d'autant mieux que la linéarisation est mieux justifiée, c'est-à-dire quand les effets non linéaires ne sont pas prépondérants et quand les variances sont faibles. Lorsque le modèle est continu, nous le remplaçons par le modèle markovien discret équivalent. Si la période d'observation est petite, par rapport au temps d'évolution du système, on utilise l'approximation au premier ordre. Dans le cas où la période d'observation n'est pas extrêmement petite, on fait alors intervenir un terme correctif pour lequel on propose une approximation lorsque la variance de l'état est faible. Si les termes de la matrice de covariance convergent vers des valeurs petites, on pourra donc conclure que les filtres discret-discret et continu-discret retenus sont proches de l'optimum.

Comme pour toutes les méthodes statistiques d'identification, la mise en oeuvre de tels filtres nécessitent la connaissance préalable de l'environnement stochastique du processus à identifier. Nous avons fait l'hypothèse que les perturbations étaient de moyennes nulles et gaussiennes, ce qui se vérifie assez souvent en pratique. Pour éviter de donner à la variance des bruits une valeur a priori toujours plus ou moins arbitraire, nous utilisons un filtre secondaire d'estimation des variances. Le problème de la connaissance des caractéristiques statistiques des perturbations intervenant sur le système se trouve ainsi grandement facilité.

Une autre difficulté se situe au niveau de l'initialisation de l'algorithme. La valeur initiale de l'état et sa covariance sont choisies à partir des connaissances a priori dont on dispose et de la confiance qu'on peut leur accorder. On peut penser que cette initialisation influe sur le résultat final, cependant nous avons pu remarquer dans de nombreuses applications que le filtre convergait vers une même valeur finale pour des valeurs initiales très éloignées. Nous proposons de plus un procédé pour éliminer de l'estimation finale l'influence de l'initialisation.

Signalons d'autre part, la souplesse d'utilisation de notre méthode de mise en oeuvre à l'aide de sous-programmes élémentaires qui nous a permis de traiter des exemples variés sans jamais entrer dans le détail des équations de filtrage.

Cependant, un des principaux attraits de la méthode est sa possibilité d'être employée en ligne et en temps réel. Nous avons en ce qui nous concerne, réalisé l'estimation en temps réel de 14 paramètres sans rencontrer de difficultés dues aux problèmes de convergence ou au temps de calcul. Toutefois, la principale application a été effectuée en temps différé. Il s'agit de l'identification de la tranche 5 de la Centrale de Nantes-Cheviré, en vue d'expérimenter en vraie grandeur des méthodes de régulation numérique, basées sur l'optimisation quadratique, l'identification par filtrage non linéaire nous a semblé bien adaptée au problème traité. Néanmoins, le point le plus délicat reste celui de la structure du modèle. Dans cette application, nous avons été guidés tout d'abord par la nature des algorithmes de commande à mettre en oeuvre et d'autre part, par des considérations physiques élémentaires (thermodynamiques essentiellement) qui nous ont permis d'utiliser au maximum toutes les mesures et toutes les connaissances que nous pouvions avoir sur le processus.

Les enseignements que nous avons tirés de cette étude, nous paraissent généraux et peuvent s'appliquer dans le principe à toute autre installation, même de type très différent.

ANNEXE

Nous avons introduit au Chapitre IV des transformations élémentaires permettant de programmer le filtre non linéaire sans entrer dans le détail des équations. Rappelons que les opérations ne portent que sur une seule composante de l'état et ne sont que des sommes ou des produits de deux composantes de l'état ou du bruit. De plus, l'équation d'observation doit être linéaire et les bruits sur les différentes sorties doivent être indépendants.

Nous détaillons ici pour chaque opération, les calculs permettant d'obtenir les paramètres statistiques (espérance et covariance) après transformation en fonction des paramètres avant transformation. Pour les sous programmes correspondants, nous faisons figurer les ordinogrammes et les listing.

1) TRANSFORMATION LINEAIRE DE BASE

Calcul de $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1} quand

$$\begin{aligned} z_{k+1}^i &= a^i z_k^i + a^j z_k^j \quad \text{et} \\ z_{k+1}^\ell &= z_k^\ell \quad \ell \neq i \end{aligned}$$

Nous disposons de $\hat{z}_k$ et M_k . Ici le système étant linéaire, nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1} &= A_k \hat{z}_k \quad \text{avec } A^{qr} = 0 \text{ sauf } \begin{cases} A^{ii} = a^i \\ A^{ij} = a^j \end{cases} \\ M_{k+1} &= A_k M_k A_k^T \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1}^i &= a^i \hat{z}_k^i + a^j \hat{z}_k^j \quad \text{et} \\ \hat{z}_{k+1}^\ell &= \hat{z}_k^\ell \quad \forall \ell \neq i \end{aligned}$$

$$M_{k+1} = A_k [M^{qr}] A_k^T \quad \text{ce qui donne :}$$

$$M_{k+1}^{i\ell} = a^i M_k^{i\ell} + a^j M_k^{j\ell} = m_{k+1}^{\ell i}, \quad \forall \ell \neq i$$

$$M_{k+1}^{ii} = (a^i)^2 M_k^{ii} + (a^j)^2 M_k^{jj} + 2a^i a^j M_k^{ij}$$

les autres composantes de $M_{k/k}$ sont inchangées

d'où le sous-programme CADDE suivant :

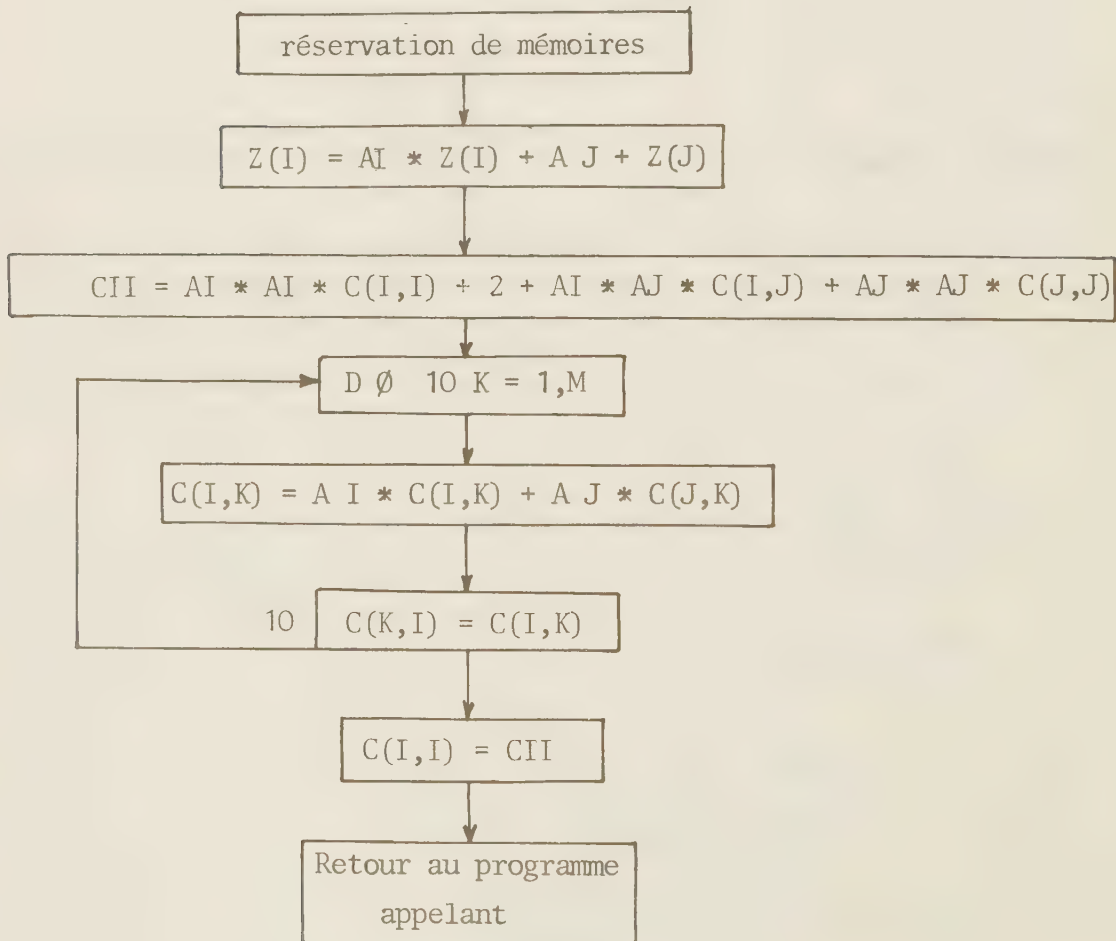
ORDINOGRAMME : S.P. CADDE

Arguments d'entrée :

$Z(I)$	$\hat{z}_k$ (tableau à N positions)
$C(I,J)$	M_k (tableau à $N \times N$ positions)
I	i N° de la composante transformée
J	j (entier)
AI	a^i un scalaire (réel)
AJ	a^j un scalaire (réel)
N	dimension maximale de Z
M	dimension effective de Z

Arguments de sortie :

$Z(I)$	$\hat{z}_{k+1}$
$C(I,J)$	M_{k+1}



LISTING

DOS FORTRAN IV

CADDE

DATE 28/10/77

```

0001      SUBROUTINE CADDE(C,Z,M,N,AI,IAJ,J)
          C
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
0003      DIMENSION C(1),Z(1)
0004      Z(1)=AI*Z(1)+AJ*Z(J)
0005      II=N*(I-1)+1
0006      IJ=N*(J-1)+1
0007      JJ=N*(J-1)+J
0008      C(1)=AI*AI*C(II)+2.*AI*AJ*C(IJ)+AJ*AJ*C(JJ)
0009      IK=I-N
0010      JK=J-N
0011      KI=N*(I-1)
0012      DO 10 K=1,M
0013      IK=IK+N
0014      JK=JK+N
0015      KI=KI+1
0016      C(IK)=AI*C(IK)+AJ*C(JK)
0017      10 C(KI)=C(IK)
0018      C(II)=C(II)
0019      RETURN
0020      END

```

2) TRANSFORMATION NON LINEAIRE DE BASE

Calcul de $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1} quand

$$z_{k+1}^i = a^i z_k^i + a^{il} z_k^j z_k^l$$

$$z_{k+1}^m = z_k^m \text{ pour } m \neq i$$

Nous sommes ici en présence d'une non linéarité. Nous allons donc appliquer tout d'abord les formules d'approximation déjà établies au chapitre II:

$$z_{k+1} = f_k(z_k) \approx A_k z_k + u_k$$

où u_k est vecteur aléatoire d'espérance $\bar{u}_k$ et de covariance Q_k

$$A_k = F_z(\hat{z}_k)$$

$$\bar{u}_k = f_k(\hat{z}_k) - F_z(\hat{z}_k) \cdot \hat{z}_k + \bar{r}_k$$

$$Q_k = R_k$$

avec

$$\bar{r}_k^i = \frac{1}{Z} T_r [F_{zz}^i(\hat{z}_k) M_k]$$

$$R_k^{ij} = \frac{1}{Z} T_r [F_{zz}^i(\hat{z}_k) M_k F_{zz}^j(\hat{z}_k) M_k]$$

($\underline{w}_k = \underline{0}$ donc $W_k = \emptyset$)

Nous calculons :

$$[F_z^i(\underline{z}_k)]^T = [0 \dots 0 \underset{\substack{\vdots \\ i \text{ème}}}{a^i} 0 \dots 0 (a^{j\ell} z_k^\ell) \underset{\substack{\vdots \\ j \text{ème}}}{0} \dots (a^{j\ell} z_k^j) \underset{\substack{\vdots \\ \ell \text{ème}}}{0} 0 \dots 0]$$

colonnes

$$F_{zz}^i = a^{j\ell} \begin{bmatrix} 0 \dots 0 1 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 1 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 1 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots j \text{ème ligne} \\ \dots \ell \text{ème} \\ \dots h \text{ème} \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \vdots \\ j \text{ème} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots \\ \ell \text{ème} \end{matrix} \text{ colonnes}$

d'où la composante i du vecteur A_{k-k} :

$$[A_{k-k}]^i = a^i z_k^i + a^{j\ell} \hat{z}_k^\ell z_k^j + a^{j\ell} \hat{z}_k^j z_k^\ell$$

toutes les autres composantes demeurent égales à la composante correspondante de $\underline{z}_k$.

$$F_{zz}^i \cdot M_k = a^{j\ell} \begin{bmatrix} M_k^{\ell 1} \dots M_k^{\ell h} \\ \vdots \\ M_k^{j 1} \dots M_k^{j h} \\ \vdots \\ M_k^{h 1} \dots M_k^{h h} \end{bmatrix} \begin{matrix} j \text{ème ligne} \\ \dots \\ \ell \text{ème ligne} \\ \dots \\ h \text{ème} \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \vdots \\ h \text{ème} \end{matrix} \text{ colonne}$

et

$$\bar{r}_k^i = \frac{1}{Z} T_r [F_{zz}^i \cdot M_k] = \frac{1}{Z} a^{j\ell} [M_k^{\ell j} + M_k^{j\ell}] = a^{j\ell} M_k^{j\ell}$$

d'où :

$$\bar{u}_k^i = a^i \hat{z}_k^i + a^{j\ell} \hat{z}_k^j \hat{z}_k^\ell - [a^i \hat{z}_k^i + a^{j\ell} \hat{z}_k^\ell \hat{z}_k^j + a^{j\ell} \hat{z}_k^j \hat{z}_k^\ell] + a^{j\ell} M_k^{j\ell}$$

$$\bar{u}_k^i = -a^{j\ell} \hat{z}_k^j \hat{z}_k^\ell + a^{j\ell} M_k^{j\ell}$$

d'autre part, $F_{zz}^j(\underline{z}_k) = \emptyset$ pour $j \neq i$

donc $R_k^{ij} = 0$ pour $j \neq i$

$$R_k^{ii} = \frac{1}{2} T_r |F_{zz}^i M_k F_{zz}^i M_k|$$

$$R_k^{ii} = \frac{1}{2} (a^{jl})^2 T_r \left[\begin{array}{cccc} (M_k^{lj} M_k^{ll} + M_k^{ll} M_k^{lj}) & \dots & (M_k^{lj} M_k^{lh} + M_k^{lh} M_k^{lj}) & \dots \\ (M_k^{jj} M_k^{ll} + M_k^{ll} M_k^{jj}) & \dots & (M_k^{jj} M_k^{lh} + M_k^{lh} M_k^{jj}) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \end{array} \right] \begin{array}{l} j^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ l^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \vdots \\ h^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{array}$$

$$R_k^{ii} = (a^{jl})^2 [M_k^{jj} M_k^{ll} + (M_k^{jl})^2]$$

enfin :

$$z_{k+1}^i = a^i z_k^i + (a^{jl} \hat{z}_k^l) z_k^j + (a^{jl} \hat{z}_k^j) z_k^l + u_k^i$$

$$u_k^i \text{ ayant pour moyenne } \bar{u}_k^i = -a^{jl} \hat{z}_k^j \hat{z}_k^l + a^{jl} M_k^{jl}$$

$$\text{et pour variance } Q_k^{ii} = (a^{jl})^2 [M_k^{jj} M_k^{ll} + (M_k^{jl})^2]$$

L'équation exprimant la $i^{\text{ème}}$ composante z_{k+1}^i étant maintenant linéarisée nous pourrions utiliser la première transformation élémentaire :

- une première fois sur les composantes i et j avec les coefficients a^i et $(a^{jl} \hat{z}_k^l)$
- une deuxième fois sur les composantes i et l avec les coefficients 1 et $(a^{jl} \hat{z}_k^j)$

Pour tenir compte de u_k^i , il nous faut alors ajouter le terme $a^{jl} (-\hat{z}_k^j \hat{z}_k^l + M_k^{jl})$ sur la $i^{\text{ème}}$ composante de z_k et le terme Q_k^{ii} sur la variance M_k^{ii} .

Nous obtenons ainsi $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1}

Cependant, il peut se produire deux cas particuliers :

1er cas : $j = i$

alors nous pourrions écrire :

$$z_{k+1}^i = (a^i + a^{jl} \hat{z}_k^l) z_k^i + (a^{jl} \hat{z}_k^j) z_k^l + u_k^i$$

Nous utiliserons donc ici une seule fois la 1ère transformation élémentaire avec les coefficients $(a^i + a^{jl} \hat{z}_k^l)$ et $(a^{jl} \hat{z}_k^j)$ le reste demeure inchangé.

ORDI C3 : $z = i$

alors :

$$z_{k+1}^i = (a^i + a^{j\ell} \hat{z}_k^j) z_k^i + (a^{j\ell} \hat{z}_k^\ell) z_k^j + u_k^i$$

Ici encore, on utilise qu'une seule fois la première transformation élémentaire avec les coefficients $(a^i + a^{j\ell} \hat{z}_k^j)$ et $(a^{j\ell} \hat{z}_k^\ell)$ d'où le sous-programme CPROD suivant :

ORDINOGRAMME

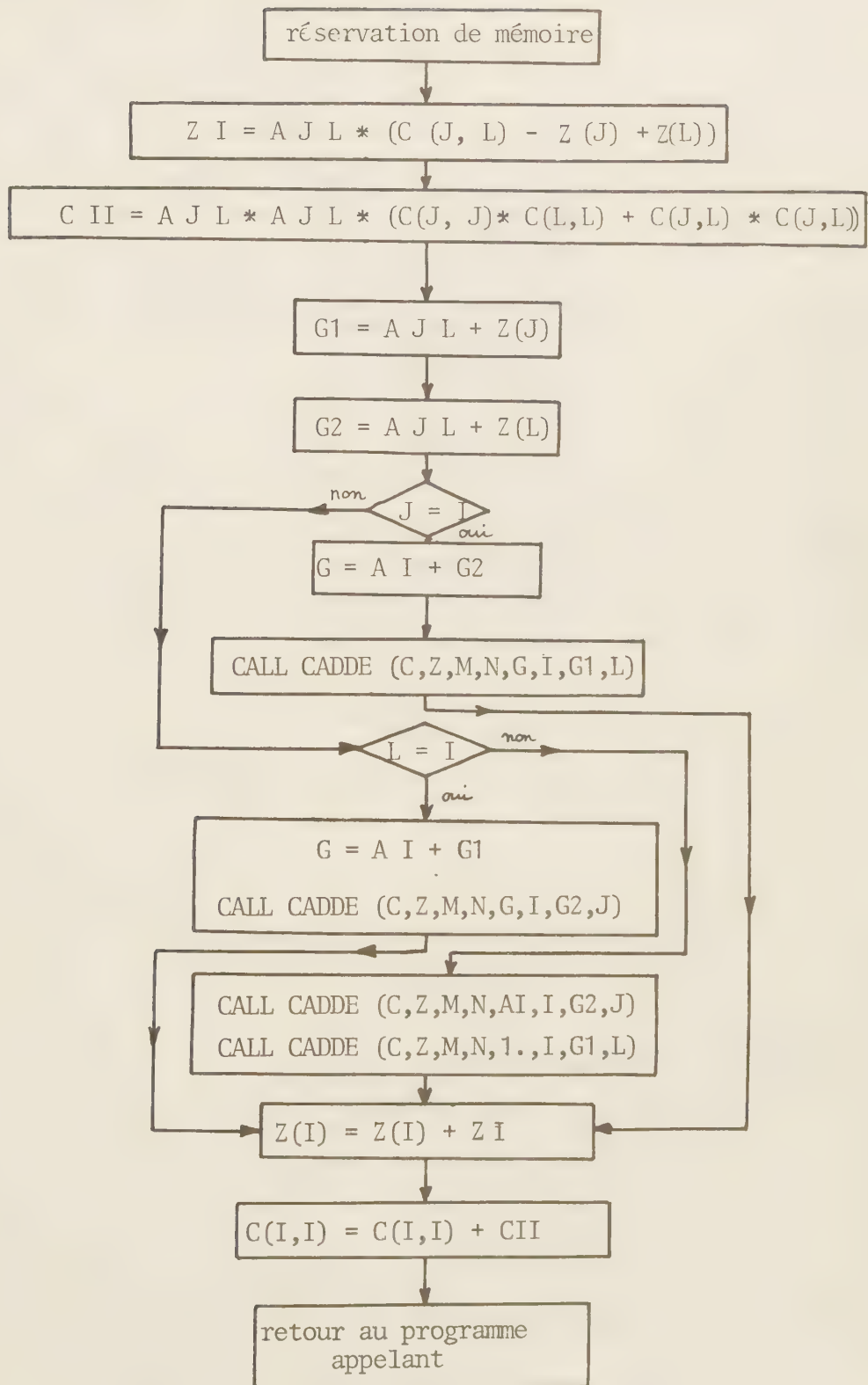
S.P. CPROD

Arguments d'entrée

$Z(I) : \hat{z}_k$ (tableau à N positions)
 $C(I,J) : M_k$ (tableau à $N \times N$ positions)
 $I : i$ N° de la composante transformée
 $J : j$ (entier)
 $L : \ell$ (entier)
 $AI : a^i$ un scalaire (réel)
 $AJL : a^{j\ell}$ un scalaire (réel)
 $N : \text{dimension maximale de } Z$
 $M : \text{dimension effective de } Z$

Arguments de sortie

$Z(I) : \hat{z}_{k+1}$
 $C(I,J) : M_{k+1}$



LISTING :

DOS FORTRAN IV	CPROD	DATE 28/10
----------------	-------	------------

```

0001      SUBROUTINE CPROD(C,Z,M,N,AI,I,AJL,J,L)
0002      C
0003      IMPLICIT REAL*8(A-H,C,Z)
0004      DIMENSION C(1),Z(1)
0005      II=N*(I-1)+I
0006      JJ=N*(J-1)+J
0007      LL=N*(L-1)+L
0008      JL=N*(J-1)+L
0009      ZI=AJL*(C(JL)-Z(J)*Z(L))
0010      CII=AJL*AJL*(C(JJ)*C(LL)+C(JL)*C(JL))
0011      G1=AJL*Z(J)
0012      G2=AJL*Z(L)
0013      IF(J-I)11,10,11
0014      10 G=AI+G2
0015      CALL CADDE(C,Z,M,N,G,I,G1,L)
0016      GO TO 30
0017      11 IF(L-I)21,20,21
0018      20 G=AI+G1
0019      CALL CADDE(C,Z,M,N,G,I,G2,J)
0020      GO TO 30
0021      21 CALL CADDE(C,Z,M,N,AI,I,G2,J)
0022      CALL CADDE(C,Z,M,N,1.,I,G1,L)
0023      30 Z(II)=Z(II)+ZI
0024      C(II)=C(II)+CII
0025      RETURN
0026      END
  
```

3) TRANSFORMATION NON LINEAIRE

Calcul de $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1} quand :

$$z_{k+1}^i = z_k^i + z_k^j \cdot w_k^{\ell}$$

$$z_{k+1}^m = z_k^m \quad \text{pour } m \neq i$$

où w_k^{ℓ} est un terme aléatoire indépendant, centré, de variance $W_k^{\ell\ell}$.

Nous sommes ici en présence d'une non linéarité sur l'état et sur les bruits. Nous allons appliquer les formules d'approximation établies au Chapitre II

$$\underline{z}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{z}_k, \underline{w}_k) \approx A_k \underline{z}_k + \underline{u}_k$$

où $\underline{u}_k$ est un vecteur aléatoire indépendant d'espérance $\bar{\underline{u}}_k$ et de covariance Q_k .

$$A_k = F_z(\hat{z}_k, 0)$$

$$\bar{u}_k = \underline{f}_k(\hat{z}_k, 0) - F_z(\hat{z}_k, 0) \hat{z}_k + \bar{r}_k$$

$$Q_k = \underline{f}_w(\hat{z}_k, 0) W F_w^T(\hat{z}_k, 0) + R_k$$

avec :

$$\bar{r}_k^i = \frac{1}{2} \text{Tr}[F_{zz}^i M_k] + \frac{1}{2} \text{Tr}[F_{ww}^i W]$$

$$R_k^{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}[F_{zz}^i M_k F_{zz}^j M_k + F_{zw}^i W F_{wz}^j M_k] + \\ \frac{1}{2} \text{Tr}[F_{wx}^i M_k F_{xw}^j W + F_{ww}^i W F_{ww}^j W]$$

Nous calculons :

$$F_z = \begin{bmatrix} 1 & \dots & w^{\ell} & \dots \\ & \ddots & \vdots & \\ 0 & & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ j^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix}$$

$$F_w = \begin{bmatrix} 0 & \dots & z_k^j & \dots \\ & \ddots & \vdots & \\ 0 & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{matrix} i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \ell^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{matrix}$$

$$F_{zw}^i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} j^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix}$$

$$F_{wz}^i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots \\ \cdot 1 & \dots & \dots \\ \vdots & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ j^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix}$$

$$F_{zz}^i = 0$$

$$F_{ww}^i = 0$$

On en déduit :

$$A_k = \mathbf{1}$$

$$\bar{u}_k = \hat{z}_k - \mathbf{1} \hat{z}_k + \bar{r}_k = \bar{r}_k$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & w^{\ell\ell} & (\hat{z}_k^j)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix} + R_k$$

$$\text{avec } \bar{r}_k = \underline{0} \quad , \quad R_k^{ij} = 0 \text{ pour } j \neq i \text{ et}$$

$$R_k^{ii} = \frac{1}{2} T_R |F_{zw}^i W F_{wz}^i M_k| + \frac{1}{2} T_R |F_{wz}^i M_k F_{zw}^i W|$$

$$= \frac{1}{2} T_R (W^{\ell\ell} \left[\begin{array}{c} 0 \\ M_k^{j1} \dots M_k^{jh} \dots \dots \\ 0 \vdots \\ \text{h}^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{array} \right] \text{j}^{\text{ème}} \text{ ligne}) + \frac{1}{2} T_R (M_k^{jj} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \dots W^{\ell\ell} \dots \\ 0 \vdots \\ \text{l}^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{array} \right] \text{l}^{\text{ème}} \text{ ligne})$$

Soit

$$R_k^{ii} = M_k^{jj} W^{\ell\ell}$$

on obtient donc finalement pour prédiction :

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k$$

$$M_{k+1}^{ii} = M_k^{ii} + W^{\ell\ell} [M_k^{jj} + (\hat{z}_k^j)^2]$$

$$M_{k+1}^{iq} = M_k^{iq} \text{ pour } q \neq i$$

Un sous programme est inutile ici pour réaliser cette opération étant donné sa simplicité.

4) CALCUL DE L'ESTIMATION CONDITIONNELLE

Calcul de $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1} quand

$$s^\ell = C^\ell \underline{z}_k + v^\ell$$

les grandeurs connues sont ici $\hat{z}_k$, M_k , s^ℓ (une composante de la sortie) C^ℓ (une ligne de la matrice d'observation) et $V^{\ell\ell}$ la variance de v^ℓ .

On note $\underline{z}_{k+1}$ la variable aléatoire conditionnelle à la composante numéro " ℓ " du vecteur de sortie $\underline{s}$.

L'espérance et la variance conditionnelle de $\underline{z}_{k+1}$ connaissant la valeur s^ℓ prise par la $\ell^{\text{ème}}$ composante de la sortie sont données en fonction des anciennes valeurs $\hat{z}_k$ et M_k par les expressions suivantes :

$$K_{k+1} = M_k (C^\ell)^T [C^\ell M_k (C^\ell)^T + V^{\ell\ell}]^{-1}$$

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k + K_{k+1} [s^\ell - C^\ell \hat{z}_k]$$

$$M_{k+1} = M_k - K_{k+1} C^\ell M_k$$

$$C^{\ell} M_k = [\alpha^1 \dots \alpha^j \dots] \quad \text{avec} \quad \alpha^j = \sum_{i=1}^n c^{\ell i} M_k^{ij}$$

$$C^{\ell} M_k C^{\ell T} = \sum_{i=1}^n c^{\ell i} \alpha^i$$

$$\text{et} \quad K_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^1}{\sum c^{\ell i} \alpha^i + V^{\ell \ell}} \\ \vdots \\ \frac{\alpha^j}{\sum c^{\ell i} \alpha^i + V^{\ell \ell}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

posons

$$\sigma = s^{\ell} - C^{\ell} \hat{z}_k = s^{\ell} - \sum_{i=1}^n c^{\ell i} \hat{z}_k^i$$

d'où :

$$\hat{z}_{k+1}^h = \hat{z}_k^h + K_{k+1}^h \sigma \quad \text{et}$$

$$M_{k+1}^{qr} = M_k^{qr} - K_{k+1}^q \alpha^r$$

Nous obtenons ainsi $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1}

D'autre part, nous pouvons exprimer l'espérance et la variance conditionnelle à s^{ℓ} de v^{ℓ} (utile pour l'estimation des variances).

Pour cela, considérons le nouveau vecteur d'état

$$\underline{y}_k = \begin{bmatrix} \underline{z}_k \\ \text{---} \\ v^{\ell} \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad s^{\ell} = [C^{\ell} \quad 0] \underline{y}_k \quad \text{et}$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\underline{z}}_k \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_k = \begin{bmatrix} M_k & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & | & V^{\ell \ell} \end{bmatrix}$$

Les formules d'estimation appliquées au système $\underline{y}_k$ nous fournissent alors $\hat{\underline{y}}_{k+1}$ et N_{k+1} d'où l'on peut extraire :

$$\hat{v}^{\ell} = E[v/s^{\ell}] = V^{\ell \ell} (s^{\ell} - C^{\ell} \hat{\underline{z}}_k) / (C^{\ell} M_k (C^{\ell})^T + V^{\ell \ell})$$

$$\hat{V}^{\ell \ell} = E[(v^{\ell} - \hat{v}^{\ell})^2 / s^{\ell}] = V^{\ell \ell} - (V^{\ell \ell})^2 / (C^{\ell} M_k (C^{\ell})^T + V^{\ell \ell})$$

d'où le sous programme CESTA suivant :

ORDINOGRAMME

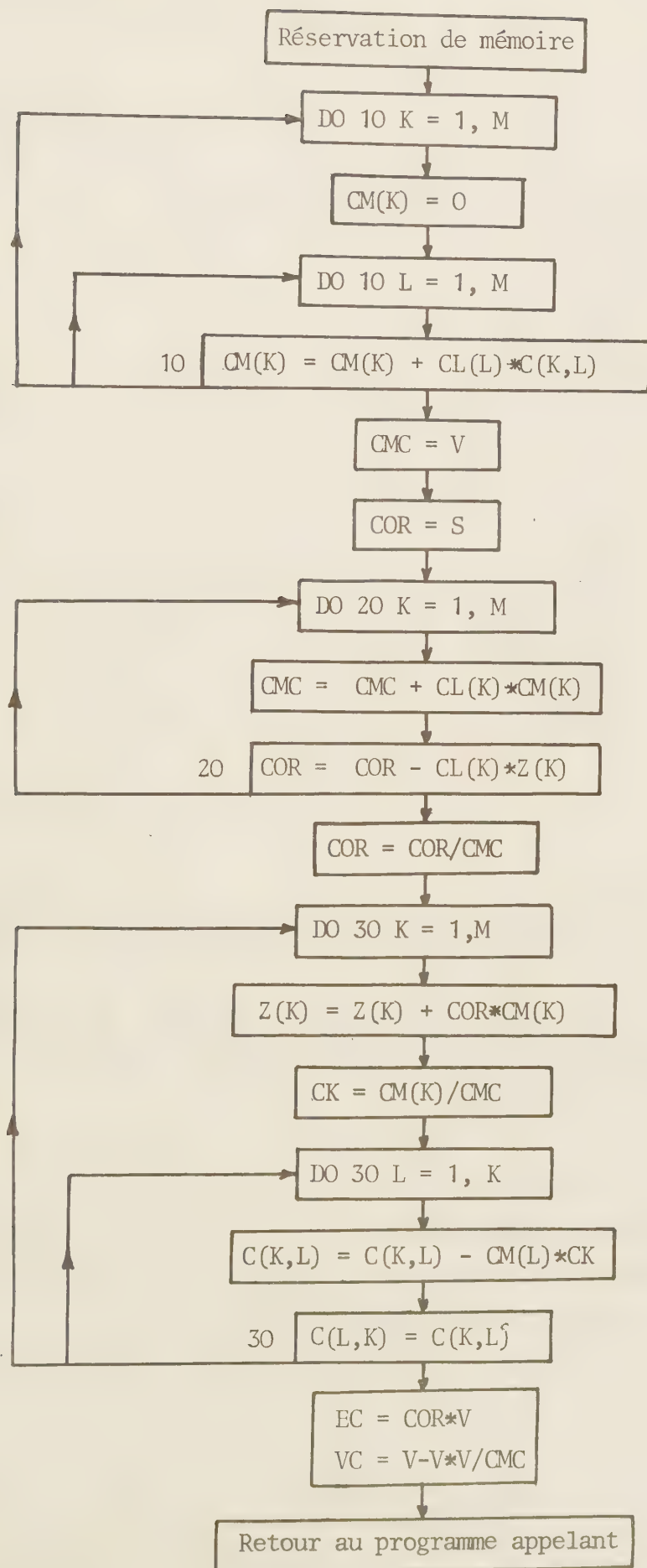
S.P. CESTA

Arguments d'entrée :

$Z(I)$: $\hat{\underline{z}}_k$ (tableau à N positions)
 $C(I,J)$: M_k (tableau à $N \times N$ positions)
 S : s^ℓ (composante ℓ de la sortie)
 $CL(I)$: C^ℓ (ligne ℓ de la matrice d'observation :
tableau à N position)
 V : $V^{\ell\ell}$ (variance de v^ℓ)
 N : Dimension maximale de Z
 M : Dimension effective de Z

Arguments de sortie :

$Z(I)$: $\hat{\underline{z}}_{k+1}$
 $C(I,J)$: M_{k+1}
 EC : $\hat{v}^\ell$ (estimation conditionnelle de v^ℓ)
 VC : $\hat{V}^{\ell\ell}$ (variance conditionnelle de v^ℓ)



LISTING :

DOS FLRTRAN IV

CESTA

DATE 28/10/

```

0001      SUBROUTINE CESTA(C,Z,M,N,S,CL,V,EC,VC,CM)
      C
0002      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
0003      DIMENSION C(1),Z(1),CL(1),CM(1)
0004      DO 10 K=1,M
0005      CM(K)=C.
0006      KL=N*(K-1)
0007      DO 10 L=1,M
0008      KL=KL+1
0009      10 CM(K)=CM(K)+CL(L)*C(KL)
0010      CMC=V
0011      COR=S
0012      DO 20 K=1,M
0013      CMC=CMC+CL(K)*CM(K)
0014      20 COR=COR-CL(K)*Z(K)
0015      COR=COR/CMC
0016      DO 30 K=1,M
0017      Z(K)=Z(K)+COR*CM(K)
0018      CK=CM(K)/CMC
0019      KL=N*(K-1)
0020      LK=K-N
0021      DO 30 L=1,K
0022      KL=KL+1
0023      LK=LK+N
0024      C(KL)=C(KL)-CM(L)*CK
0025      30 C(LK)=C(KL)
0026      EC=COR*V
0027      VC=V-V*V/CMC
0028      RETURN
0029      END

```

chaque composante s^l de la mesure est souvent fonction au plus de deux composantes de $\underline{z}_k$.

Dans ce cas, pour éviter des opérations inutiles, on utilisera la transformation élémentaire qui calcule l'estimation de $\underline{z}$ conditionnellement à la composante s^l de la mesure $\underline{s}$ pour :

$$s^l = c^i_{z_k} i + c^j_{z_k} j + v^l$$

Les équations qui permettent d'obtenir $\hat{z}_{k+1}$ et M_{k+1} , établies plus haut dans le cas général restent bien sûr valables mais le programme est plus simple et nécessite un temps d'exécution beaucoup plus court.

ORDINOGRAMME

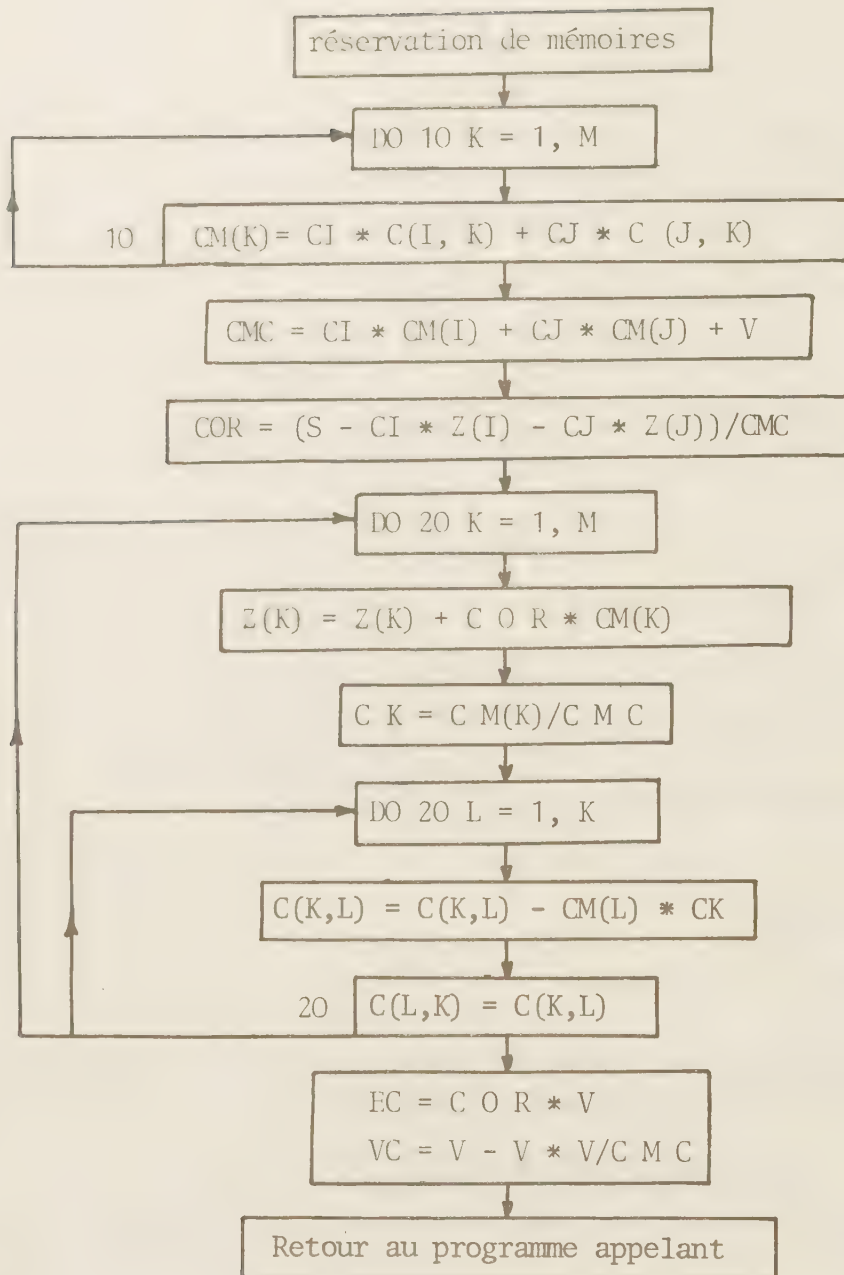
S.P. CESTE

Arguments d'entrée :

$Z(I) : \hat{z}_k$ (tableau à N positions)
 $C(I,J) : M_k$ (tableau à $N \times N$ positions)
 $I : i$ (entier)
 $J : j$ (entier)
 $CI : c^i$ (réel)
 $CJ : c^j$ (réel)
 $V : V^{\ell\ell}$ (variance de v^ℓ)
 $S : s^\ell$ (composante ℓ de la sortie)
 $N : \text{dimension maximale de } Z$
 $M : \text{dimension effective de } Z$

Arguments de sortie :

$Z(I) : \hat{z}_{k+1}$
 $C(I,J) : M_{k+1}$
 $EC : \hat{v}$ (estimation conditionnelle de v^ℓ)
 $VC : \hat{V}^{\ell\ell}$ (variance conditionnelle de v^ℓ)



LISTING :

DUS FORTRAN IV

CESTE

DATE 28/10/

```

0001          C      SUBROUTINE CESTE(C,Z,M,N,S,C1,I,CJ,J,V,EC,VC)
0002          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003          DIMENSION C(1),Z(1),CM(50)
0004          IK=I-N
0005          JK=J-N
0006          DO 10 K=1,M
0007          IK=IK+N
0008          JK=JK+N
0009          10 CM(K)=C1*C(IK)+CJ*C(JK)
0010          CMC=C1*CM(I)+CJ*CM(J)+V
0011          COR=(S-C1*Z(I)-CJ*Z(J))/CMC
0012          DO 20 K=1,M
0013          Z(K)=Z(K)+COR*CM(K)
0014          CK=CM(K)/CMC
0015          DO 20 L=1,K
0016          KL=N*(L-1)+K
0017          LK=N*(K-1)+L
0018          C(KL)=C(KL)-CM(L)*CK
0019          20 C(LK)=C(KL)
0020          EC=COR*V
0021          VC=V-V*V/CMC
0022          RETURN
0023          END

```